Українське логічне товариство
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний університет «Києво-Могилянська Академія»
Національний університет «Львівська політехніка»

ПЕРША УКРАЇНСЬКА КОНФЕРЕНЦІЯ «ЛОГІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» (UCLA’2019)

ПРАЦІ КОНФЕРЕНЦІЇ

Київ, Україна
25–29 листопада 2019 року

УДК 164

Н64

Наукові редактори: доктор фіз.-мат.наук, професор Нікітченко М.С., доктор філос. наук, професор Дуцяк І.З., кандидат фіз.-мат. наук Шишацька О.В.

ПРАЦІ ПЕРШОЇ УКРАЇНСЬКОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «ЛОГІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ». – Київ: «АВАНПОСТ-ПРИМ», 2019. – 136 с.

ISBN 978-617-502-141-5

УДК 164

ПРАЦІ ПЕРШОЇ УКРАЇНСЬКОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ «ЛОГІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

У збірнику подано статті та тези Першої Української конференції «Логіка та її застосування». Основними напрямами наукових робіт є: 1) застосування математичної логіки у комп'ютерних науках; 2) філософська логіка та 3) проблеми викладання логіки.

Перший напрям представлений роботами доктора фіз. мат. наук Чеботарьова А. М., доктора фіз. мат. наук Жолткевича Г. М. та Громового А. О. про зв'язок логік, структур даних та мов специфікацій; статтями доктора фіз. мат. наук Скоболева В. Г., доктора фіз. мат. наук Летичевського О. О., кандидата фіз. мат. наук Омельчук Л. Л. та кандидата фіз. мат. наук Шишацької О. В. про алгебри структур даних та поведінок; статтями доктора фіз.-мат. наук Нікітченка М. С., доктора фіз. мат. наук Шкільняка С. С. та кандидата фіз. мат. наук Шкільняк О. С. про програмно орієнтовані логіки з композицією предикатного доповнення; роботи кандидата фіз. мат. наук Лялецького О. В., кандидата фіз. мат. наук Іванова Є. В., Круковця Д. Ю. про спеціальні проблеми математичної логіки. Загальним питанням математичної логіки та теорії алгоритмів і їх зв'язку з інформатикою присвячені роботи доктора фіз. мат. наук Провотаря О. І., доктора фіз. мат. наук Кривого С. Л. та Гогерчака Г. І.

До другого напряму належать статті доктора філософських наук Дуцяка І. З., присвячені аналізу парадоксів Зенона та теорії логіки відношень; робота доктора філософських наук Навроцького В. В. про числову аргументаційну семантику для обґрунтування прийняття рішень в умовах невизначеності; стаття кандидата філософських наук Васильченка А. А. про застосування логіки інтенційності до аналізу суб'єктивних онтологій, а також робота кандидата філософських наук Кохана Я. О. про λ-конверсії в функціональній логіці.

До третього напряму належать роботи кандидата фіз. мат. наук Зубенка В. В., кандидата пед. наук Русіної Н. Г., кандидата фіз. мат. наук Дрінь С. С. та Лемешко Є. І.

КИЇВ, 2019

ISBN 978-617-502-141-5

ПЕРША УКРАЇНСЬКА КОНФЕРЕНЦІЯ
«ЛОГІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» (UCLA'2019) –
щорічна конференція Українського логічного товариства – міждисциплінарна конференція, присвячена питанням дослідження логіки та її застосування.

Напрямки конференції: • філософські та історичні аспекти логіки; • класична та некласичні логіки;• логіка в комп'ютерних науках; • логіка в гуманітарних науках; логіка в освіті; • студентська секція.
Мови конференції: англійська та українська

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ:
Дуцяк І. (голова)
Нікітченко М. (голова)
Богомолов С. (Австралія)
Другус І. (Молдова)
Жолткевич Г. (Україна)
Корнілович А. (Польща)
Кохан Я. (Україна)
Львов М. (Україна)
Летичевський О. (Україна)
Лялецький О. (Україна)
Петравчук А. (Україна)
Песчаненко В. (Україна)
Скобелєв В. (Україна)
Тимофієв В. (США)
Шкільняк С. (Україна)

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ:
Нікітченко М. (голова)
Шишацька О. (секретар)
Кохан Я.
Омельчук Л.
Тімофєєва О.
Поліщук Н.
Денищук Г.
Сімянчук І.

КОНТАКТИ:
Електронна пошта: logicukraine@gmail.com
Телефон: +38 (044) 521-33-45 - кафедра теорії та технології програмування.

ЗМІСТ

СТАТТІ

Dutsyak I. ANALYSIS OF THE SOURCES OF CONTRADICTION IN ZENO'S DICHOTOMYAPORIA …… 9
Skobelev V.G. ALGEBRAIC BACKGROUNDS FOR DATA STRUCTURES MODELS……... 20
Васильченко А. А. ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГІКИ ІНТЕНЦІЙНОСТІ ДО АНАЛІЗУ СУБ'ЄКТИВНИХ ОНТОЛОГІЙ…… 32
Дуцяк І. КОНЦЕПЦІЯ ТЕОРІЇ ЛОГІКИ ВІДНОШЕНЬ ІЗ СУБ'ЄКТНО-ПРЕДИКАТНИМ ЗАПИСОМ ВИСЛОВІВ…….. 41
Кривий С.Л., Гогерчак Г.І. ЛОГІКА В МАТЕМАТИЦІ І ІНФОРМАТИЦІ…….. 47
Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ З КОМПОЗИЦІЄЮ ПРЕДИКАТНОГО ДОПОВНЕННЯ…… 56
Провотар О.І. АЛГОРИТМИ І ФОРМАЛЬНІ МОДЕЛІ ОБЧИСЛЕНЬ…….. 69
Чеботарьов А.М. МОНАДИЧНІ ЛОГІКИ LP і LF ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЯК МОВИ СПЕЦИФІКАЦІЇ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ…….. 78
Шкільняк С.С. ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ З РІВНІСТЮ ТА ПРЕДИКАТНИМ ДОПОВНЕННЯМ……. 88
Шкільняк О.С. ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІКАХ З ПРЕДИКАТНИМ ДОПОВНЕННЯМ……. 100

ТЕЗИ

Ivanov I. ON THE OPEN INDUCTION PRINCIPLE…….. 115
Kokhan Y. CORRECTION FOR Λ-CONVERSION IN FUNCTIONAL LOGIC……... 116
Krukovets Dmytro. NON-STATIONARY TIME-SERIES DISTANCE CLUSTERING FOR A SIMILARITY ANALYSIS……... 117
Zholtkevych G. and Gromovoy A. HOW TO COMPARE THE EXPRESSIVENESS OF CAUSALITY RELATIONSHIPS SPECIFICATION LANGUAGES BASED ON THE CONCEPT OF LOGICAL CLOCKS?..... 120
Дрінь С.С., Лемешко Є.І. СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ……. 123
Зубенко В.В. ПРО ПОВНОТУ КЛАСИЧНИХ ЛОГІЧНИХ ЧИСЛЕНЬ……. 125
Зубенко В.В. ПРО ПРОЦЕДУРНУ ПЛАТФОРМУ ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ……. 126
Летичевський О.О. АЛГЕБРА ПОВЕДІНОК ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ……. 128
Лялецький О.В. ПРО ВБУДОВУВАННЯ В ЗВОРОТНИЙ МЕТОД ТЕХНІКИ РОБОТИ З РІВНІСТЮ……. 130
Навроцький В. ОБҐРУНТУВАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ: АРГУМЕНТАЦІЙНА СЕМАНТИКА…… 131
Омельчук Л.Л., Шишацька О.В. ЗАДАЧА РОЗВ'ЯЗНОСТІ ФОРМУЛ В ТЕОРІЇ НОМІНАТИВНИХ ДАНИХ…… 133
Русіна Н.Г. ФОРМАЛІЗАЦІЯ РЕЧЕНЬ ПРИРОДНОЇ МОВИ МОВОЮ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЕНЬ……. 135

СТАТТІ

Dutsiak Ihor, Doctor of Philosophy, Professor,

National University "Lviv Polytechnic",

e-mail: Idutsyak@gmail.com

ANALYSIS OF THE SOURCES OF CONTRADICTION IN ZENO'S DICHOTOMYAPORIA

Ihor Dutsiak

Abstract. The purpose of the study is to identify the sources of the contradiction of Zeno's Dichotomy aporia. The real instances of motion with separable parts were analyzed. The knowledge acquired while observing the relation between the whole movement and its parts was compared with Zeno's reasoning in the Dichotomy aporia. Real examples of motion from the point of view of mereology (part-whole relation) and elementary mechanics are investigated. It has been investigated that in the case of motion analysis in the categories of parts of motion that begin with the whole motion, the beginning of the motion of each of these parts is independent of the beginning of the motion of other parts. In this case, the whole motion and the motion of all its parts begin simultaneously. Similarly, it is justified that in case of the completed motion, all parts of the motion are completed simultaneously with it, i.e. the completion of one part of the motion cannot be a condition for the completion of the other part of the motion. It is justified that in order to ensure the condition "before the last point of the path is reached, the previous one must be passed" it is not necessary to break the path in steps that end before the last point of the path. The mereological axiom about the integration of the whole with its parts is justified, which allows, on the basis of formal approaches, to prevent similar contradictions or eliminate them.

Keywords: *aporia, Dichotomy, source of contradiction, infinite divisibility, "part-whole" relation, mereology, axiom.*

The essence of this cognitive problem lies in the following. Zeno of Elea tried to justify the impossibility of motion. He argued that any distance the object moves is infinitely divisible. Thus he concluded that all motion is impossible. Since such a conclusion contradicts to everyday experience, it is important to find out the source of this contradiction. The importance of finding the source of contradiction in any paradox, or aporia, is due to the fact that the existence of contradictions, the sources of which have not been identified, is a sign of the logic theory imperfection. Therefore, any unsolved paradox, or aporia, is a manifestation of a cognitive problem, being a stimulus for seeking explanations that could advance the theory of logic.

In more detail, the essence of this cognitive problem can be presented as follows. The information about Dichotomy first appeared in Aristotle's "Physics". In such account, this aporia calls for an explanation of at least three problems. The essence of the first cognitive problem (the first variant of aporia) comes down to explaining how movement can start if you cannot specify the "first distance" of it: "Zeno's arguments about motion, which cause so much disquietude to those who try to solve the problems that they present, are four in number. The first asserts the non-existence of motion on the ground that that which is in locomotion must arrive at the half-way stage before it arrives at the goal" [1, P. 323].

In fact, before an object can travel the whole distance, it must travel a part of it, in order to travel this part it must travel a part of this part. Because of the infinite divisibility of this distance into halves, the motion cannot begin. This version of aporia is called regressive (Fig. 1).

Fig. 1 The regressive version of the Dichotomy Aporia

According to the second version of the aporia, it is necessary to explain how the motion can be completed if its final part cannot be specified: "… Zeno's argument makes a false assumption in asserting that it is impossible for a thing to pass over or severally to come in contact with infinite things in a finite time" [1, P. 315]. In this case, contrary to the previous one, it is asserted that the motion *does* take place: first an object travels a part (a half) of the distance, then, to reach the goal, it has to travel a half of the half and so *ad infinitum*. Thus there occurs an infinite number of parts of the motion, which cannot be completed at all. This form of aporia is called progressive (Fig. 2).

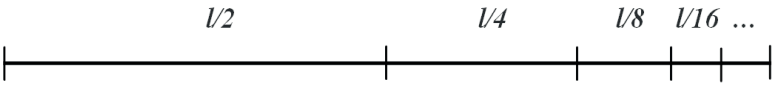


Fig. 2 The progressive version of the Dichotomy Aporia

The third cognitive problem is formulated by Aristotle during the reconstruction of Zeno's aporia in the previous citation: how is it possible to pass over infinite things (parts of the path) in a finite time interval?

One of the first critics of the Dichotomy Paradox was Aristotle, who argued that the infinite number of the diminishing parts of distance corresponds to the same infinite number of the diminishing time intervals. This explanation is constantly criticized. Thus the objection is that Aristotle's explanation makes it impossible to understand how an infinite number of partial events can be transformed into a finite event: "Against this form of the argument Aristotle quite appropriately pointed out that the time span during which Achilles chases after the tortoise can likewise be subdivided into infinitely many non-zero intervals, so Achilles has infinitely many non-zero time intervals in which to traverse the infinitely many non-zero space intervals. But this response can hardly be adequate, for the question still remains: how can infinitely many positive intervals of time OR space add up to anything less than infinity? The answer to this question was not provided until Cauchy offered a satisfactory treatment of convergent series in the first half of the nineteenth century" [2, P. 132].

The explanation for the lack of contradiction of the convergent $1/2^n$ series became popular because it has a limit that can be calculated. However, this approach has also been criticized because the convergent series never completes, and therefore, using it, we cannot

disprove the opinion that the motion cannot begin or end: “Usually, they try to get around the paradox by arguing that the sum of an infinite number of these time intervals nevertheless converges and therefore gives a finite time interval. However, this reasoning does not at all touch one essentially paradoxical moment, namely, a paradox that can be reduced to the following: some infinite sequence of events that follow one after another, a sequence whose completeness we cannot even imagine (not only physically but also in principle), in reality still must be completed”[3, P. 16].

One approach to eliminating contradiction is to accept the quantization of motion, and consequently, of time and space [4]. There are several reasons for this approach: “On the other hand, I believe that the theory that space is continuous is wrong, because we get these infinities and other difficulties, and we are left with questions on what determines the size of all the particles. I rather suspect that the simple ideas of geometry, extended down into infinitely small space, are wrong. Here, of course, I am only making a hole, and not telling you what to substitute. If I did, I should finish this lecture with a new law” [5, P. 166–167].

The closest approach to solving the paradox (in author’s opinion) proved to be the one suggested by Bertrand Russel. In his work “The Principles of Mathematics” he mentioned that “the infinite regress consists merely in the fact that every segment of real or rational numbers has parts which are again segments; but these parts are not logically prior to it, and the infinite regress is perfectly harmless”(5, p. 350). This statement can be interpreted in such a way: the object can be divided into infinite number of parts, but counting the number of objects, we cannot count parts, because they have already been counted with the objects whose constituents they are. Russel described the *part-whole* relation with the help of the conceptual instrument of a set theory. At the same time, this relation can be more naturally described with the use of mereology concepts. Bertrand Russel did not propose some formal means of avoiding or eliminating such paradoxes. After all, when paradoxes were elicited in the naïve set theory (and its implementation became problematic), axioms were introduced for avoiding contradictions during the thinking process. Such activities should be also implemented in this case. Both this idea and the need to specify the crux of the paradox have been the reason for determining the aim of this research.

The aim of the paper is the clarification of the knowledge of the sources of the contradiction in Zeno's Dichotomy aporia. This being pursued, the following gnoseological activities were included: 1) the real instances of motion with separable parts were analyzed, and 2) the knowledge acquired while observing the relation between the whole movement and its parts was compared with Zeno's reasoning in the Dichotomy Aporia.

Let us consider, first of all, real-world examples of motion, on the basis of which the relationship between the whole movement and its parts can be analyzed. Take, for example, familiar motion of a passenger train. The train moves from the point of departure to the final stop. Passengers leave at the stops located at a distance of l/16, l/8, l/4, l/2 from the departure point. One passenger leaves the train at each stop. (The number of passengers leaving at a stop is irrelevant in the analysis. However, let's take it for better understanding.) So the model of motion (you can actually reproduce it) is like this. Before the last passenger leaves at the final stop, it is necessary for a previous passenger to leave at a stop located at a half of a distance (l/2). Before this passenger leaves, it is necessary that a passenger left at a distance of l/4 from the beginning of the motion. This should be preceded by the exit of the passenger at a distance of l/8 from the start of the travel. And this will not happen if the train does not pass the stop at a distance of l/16 from the beginning of the motion (where the first passenger must leave).

Let's analyze this model of motion. When passengers are traveling by train, no matter what part of each passenger's journey, they all start moving at the same time. Moreover, these are not different motions, but the motion of the same train. This fact is more clearly visualized when depicting each part of the motion separately (Fig. 3). Such an image clearly shows that each part of the motion begins simultaneously with the other parts of the motion and with the motion as a whole. It is more accurate to say that the motion of the parts does not begin at the same time, but that their onset is mutually identical and identical with the whole motion (the motion of all parts and the whole occur as one motion). After all, starting their motion simultaneously, all passengers do not perform motions that are independent of each other (as it would be in the case of their travelling by different trains). Their motion is the same motion of the train. Therefore, the motion of each part of the whole motion is at the same time a manifestation of the whole motion.

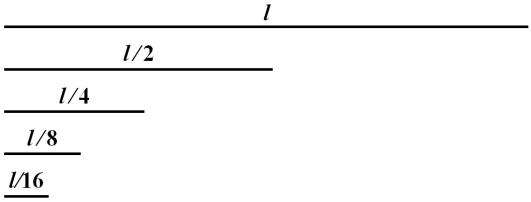


Fig. 3 Representation of the relation between the duration of the whole motion and its parts (from the beginning of the motion); the parts of the motion are presented as independent

We now compare the observations described with Zeno's reasoning. Let us first consider Zeno's reasoning that there exist conditional connections between the parts of the described motion (the next part of the motion will not happen before the part of this part first occurs). In each part of the motion (as itis clearly shown in Fig. 3) it is possible to distinguish its beginning, duration and termination. Obviously, there exists such a conditional relationship between the moments of completion of any part of the motion and the completion of the previous part of the motion. However, there is no such connection between the beginnings of the motion of the depicted motion parts; they all start together. Therefore, on the basis of the conditional relation between the closing moment of the interval of motion and the closing moment of its part, it is not possible to conclude that there is a similar connection between the beginnings of these motions. Therefore, the mere fact of existence of a conditional connection between the final parts of the motion of an arbitrary period of motion and the part thereof cannot be the basis for the conclusion that it is impossible to start the motion. Any other motion can also be taken as an example. For example, to put a letter in a mailbox at the end of the journey, a post person must first put a letter in the mailbox on her half way. But, before that, she must put a letter into a mailbox at a quarter of her way, and so on. However, the post person's motion for one sixteenth, one eighth, one fourth, one second of the whole distance and her motion for the whole distance is one and the same motion. When the second hand of the clock passes the first second, this is at the same time the beginning of the minute, the hour, the month, the year, the millennium etc.

The example analyzed differs from the Zeno’s motion model in that it takes a finite number of parts. In the case of infinite division, the whole infinite number of parts of the motion must also begin as a single motion, and therefore, the grounds for the inability to

begin the motion should not arise. The analyzed example, in which we compare parts of the same motion, can be presented as a model of multiple independent motions. For example, we can make a line of archers who fire at the same time, but every time each of them fires at a distance shorter than the goal. Similarly, the motion of a train, which is left by one passenger at each stage of motion, can be replaced by a corresponding number of trains, each carrying one passenger and traveling the distance twice shorter than the previous one. Similar will be the chord with an arbitrary number of sounds, each of which lasts twice shorter than the previous one. Hence, it must be deduced that the beginning of an entire motion is at the same time the beginning of an infinite number of parts of this motion, in which there is no first part (the one that cannot be halved).

However, these considerations relate not only to the infinite number of points near the infimum, ie the lower limit of the interval, but also to the supremum (the upper limit of the interval). This is just the reversed situation. In this case, the post person does not put the letters in the mailboxes, but collects them and carries them to the post office. They (these letters) move together, this is the same post person's motion, and they will complete the motion at the same moment with the post person's motion being completed. The same is true of passengers: one of them boarded the train in the middle of the road, the second one at a distance of 1/4 to the end of the journey, the third one at a distance of 1/8 and so on. They all complete (and will complete) the motion at the final station. Therefore, arriving at the terminal station of the passenger who was the last to board the train is not a condition for arriving at this station of the passenger who boarded the train in the middle of the road; they will all arrive at the same time (Fig. 4).

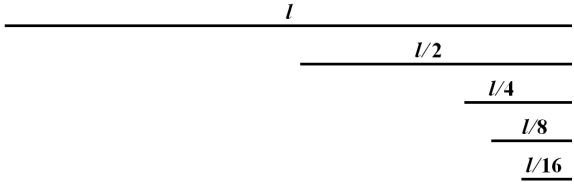


Fig. 4 Representation of the relation between the duration of the whole motion and its parts (before the motion completion); the parts of the motion are presented as independent

These considerations apply not only to the beginning and the end of the motion, but also to any moment of motion during its duration. After all, at any station within the route passengers board the train, and they will leave the train at different distances from the place where they started their trip (the same being true about the passengers who boarded the train at the departure station). Similarly, at each station there are passengers who leave the train having covered different distances (from the place where they boarded the train). The fact that the number of parts of motion that begin and end at each point in space and time of the infinite universe is infinite (unlike the number of passengers on the train, the number of letters with the post person, the number of mixed sounds in the chord), does not change anything in these considerations. The duration of a second is the duration of the part of any period (a minute, an hour, a year, a millennium etc.) that begins, lasts, or ends with this second.

Therefore, the absence of a minimum distance, a minimum period of time (during which the change occurs either at the beginning, in the middle, or at the end of the motion), of the first or the last part in an infinite number of parts of any phenomenon does not

contradict nature. Thus, in fact, Zeno's conclusion in the Dichotomy aporia about the absence of the first or last parts of the motion does not imply impossibility of starting or ending the motion.

In addition to the just considered objection to the alleged contradiction in the Dichotomy aporia, other objections should be analyzed. In the case of the progressive version of aporia, Zeno assumes that the motion has taken place (for a half path). Then there should be no problems with traveling the whole distance. It is enough to pass the same distance that the moving body has just passed. The linear dimension of such motion is irrelevant. It may not be a half, but an arbitrary part of the distance (by repeating the motion certain number of times, one can overcome any distance).

In view of the second argument, there also emerges a third objection to the aporia analyzed. Zeno builds aporias in a similar way. All of them (including aporias about motion) have the following structure: 1) let us assume that the motion exists, 2) from this assumption there follows the conclusion that all motion is impossible. However, Zeno only declares that he assumes the existence of the motion. If he really made such an assumption (that the object is capable of moving to some distance), then the conclusion about the inability to move would be refuted by the previously described counterargument concerning transfer of the performed motion (and not of its part).

Another objection arises if one interprets the decrease in the distance traveled at each subsequent step of motion as a consequence of a constant decrease in speed. At the same time, everyone knows from school that motion can be not only slowed down according to the laws of the convergent series, but it can also be uniform or accelerated. In the last two cases, there is no problem with passing an arbitrary finite distance, as well as with the ability to catch up with and overtake the object that moves more slowly.

For a more thorough analysis, let us consider the arguments for Dichotomy aporia from the point of view of elementary mechanics. Therefore, let us compare the graphic model of steady motion (at the level of the simple tasks on mechanical motion from secondary school syllabi) (Fig.5) with the graphic model of the motion depicting Zeno's aporia.

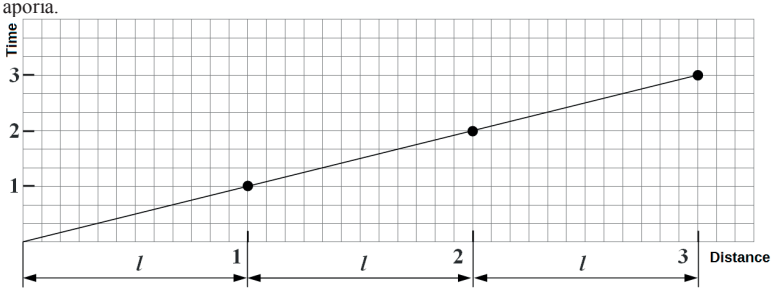
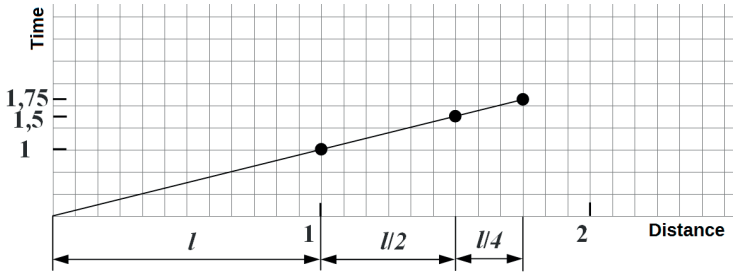
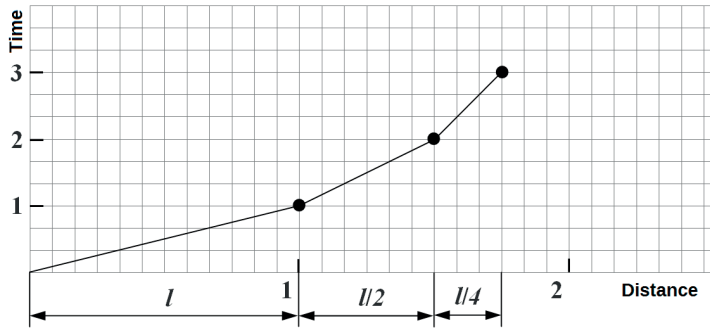


Fig.5. Graph of steady motion



a



b

Fig.6. Graph of the motion according to Zeno's Dichotomy Aporia
a) motion with the decrease in movement time periods b) motion with decrease in speed

When the motion is steady during every equal time period (they can be considered as movement stages), the body covers the same distance. In this case this body can cover any distance, and it does. When such a modelling of the mechanic motion is conducted, the terminal point of every next stage of motion is by no means connected with the terminal point of the whole movement. In other words, the condition of the end of the arbitrary movement stage being located before the end of the whole movement is not imposed.

Let us consider the model of Zeno's motion. The motion when the body covers the part (a half) of the distance and each next distance is a half of the half can be realized in only two ways: a) if the motion is steady, that is, the speed is constant; in this case constant halving the distances can be achieved only by shortening the time intervals of movement stages (as if the body is prohibited to move forward any longer, but the time period of the next movement stage is shortened) (Fig.6a); b) if motion is decelerating, and the deceleration law is the same as the law on the shortening the movement distance, that is, at each next stage speed is halved, and the body covers the half of the previous distance (Fig.6 b).

In both cases of motion modelling shown in Fig.6, Zeno "forces" the body to move stage by stage, and final points of these stages should be necessarily located before the end of the whole motion. He argued that before the body approaches the terminal point, it must pass all previous points. However, there is no obligation here, because the body will approach and

pass all previous points even if the last point of the last movement stage is the final point of the motion.

This substitution (explanation of the non-obligatory connection as obligatory) is another source of the contradiction of Zeno's Dichotomy aporia. Therefore, the condition that before approaching the terminal point it is necessary to approach and pass intermediate points does not cause the condition that final points of all next motion stages must be located only in the boundaries between the beginning and the end of the motion. In the aporia this second condition is used, but is not openly manifested, as well as the fact that it probably results from the first condition.

For creating a formal instrument for preventing the occurrence of the contradictions like that of Zeno's Dichotomy aporia, let us analyze the mereological relation between the part and the whole. Let us assume that the distance between the beginning and the end of the motion equals 2 meters. After the first distance division two parts are given, and their length is one meter each. Then let us divide every meter into decimeters and obtain 20 decimeters. The next step of the division will be dividing each decimeter into centimeters. Then centimeters are divided into millimeters and *ad infinitum*.

Thereby, there are different structural division levels: the first one is a subdivision into meters; the second is the subdivision into decimeters; the third one is subdivision into centimeters etc. For putting the parts together into the totality (the initial total distance), their parts should be united as 2 meters, or as 20 decimeters, or as 200 centimeters, or as 2000 millimeters (and so on while uniting the parts of the parts). As a result of each of these uniting processes, we will obtain the initial totality. The number of the parts at each level of subdivision which being then united will make up the initial totality will be always finite (2 meters, 20 decimeters, 200 centimeters, 2000 millimeters etc.).Total distances obtained by such uniting will always be finite and be equal to the length of the initially divided distance, that is, 2 meters. Therefore, though the division can be infinite, the number of parts (at each division level) is finite and no paradox occurs during their uniting into the whole. Moreover, in this case no problem of the search for the first movement occurs.

The paradox occurs when the totality is united with its parts. When we add the parts of initial total distance which are two sections with the length equal to 1 meter to 20 decimeters which are their constituents, we will not obtain the initial totality (2 meters), because uniting 2 meters into the whole, we have united decimeters which are contained in (or which contain) these meters as well. As a result of described unification of the totality with its parts, we many times add together the same distances (or time periods): when we united decimeters, we simultaneously added into the whole centimeters which are the parts of these decimeters, and millimeters which are the parts of these centimeters, and the rest infinite number of the distances, put one into another. Exactly as a result of the unification of the whole with its parts and parts of these parts we obtain the infinite numbers of parts (body elements, distances, time distances) which correspond not only with one whole which was initially divided into parts, but infinite numbers of such totalities. A reverse “mechanical’ unification of this infinite number of parts causes the paradox.

Let us create a symbolic (and simultaneously graphic) model of dividing into the parts. Initial whole which will be divided to the parts is lettered “o” with a sub-index “t” (the first letter of Latin word “totius” meaning “totality”), that is, o_t (Fig.7), noting that in the analyzed example the totality stands for the initial distance. Therefore, the analyzed totality consists of two parts (two meters). Let us designate these parts as $o^t_{1,1}$ and $o^t_{1,1}$. Upper index marks the distance whose parts are these parts.

Since this totality is an initial divisible distance, the upper index is *t*. The sub-index contains two numbers. First of them designates the level of division. As this is the first step of the division, the first number in the sub-index is 1. Since we have obtained two parts as a

result of subdivision of the totality into parts (2 meters), the second number of the sub-index denotes the first meter (the first part) and is equal to 1, and another sub-index denotes the second meter and is equal to 2 (in Fig.1 the levels of subdivision are marked with a dashed line). A zero level is a level of the divided, that is, the total object.

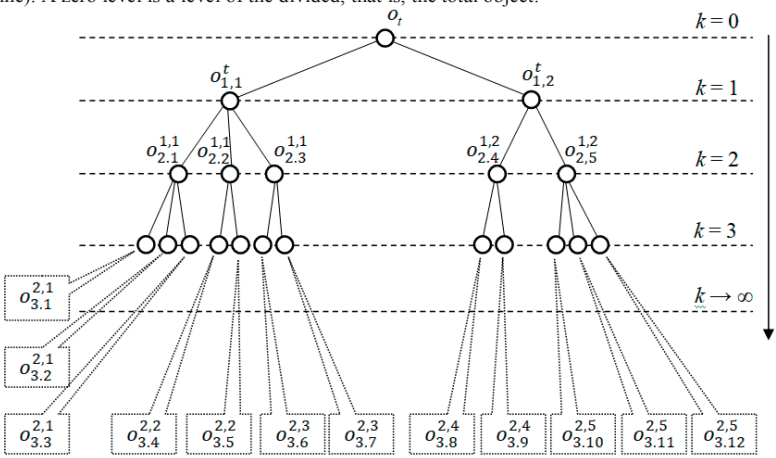


Fig.7. Graphic model of the subdivision into parts

At the second level of the subdivision each of two meters is divided into decimeters. The symbolic form of the parts of subdivision is created according to the general principle $o_{k,l}^{i,j}$, where i is a level of the distance subdivision which is a totality for this object; j is an order number of the mentioned totality at the subdivision level i; k the level of subdivision (i.e., at what step of the division the marked part is obtained); l is the order number of the marked part at the division level k.Fig.7 shows that the first object (the first part) of the first division level, that is, the first meter, contains three parts at the second level of subdivision (literally, the first meter contains three decimeters instead of ten). In the same way it is shown that the second meter contains two decimeters instead of ten. This is the obvious distortion, but this conditional character of depicting (beginning from the second division level) occurs due to difficulties caused by representing a large number of parts.

Each distance of the first level $o_{1,l}^{t}$ is a part of the total distance o_t (which is subdivided into parts). At the same time, each distance of the first level is the totality in reference to its parts at the second level. Upper indices of the part co-inside with sub-indices of the totality. For example, the fact that the distance $o_{3,1}^{2,1}$ is the part of the distance $o_{2,1}^{1,1}$ manifests itself in the identity of the values of the upper indices ($i = 2$, $j = 1$) of marking the part of the distance with the values of the sub-indices in the marking of the total distance ($k = 2$, $l = 1$).

The number of elements at each level q_1, q_2, q_3, q_n is a finite number (it belongs to the set of natural numbers N and equals the maximum value of the index l, i.e. $l_{\max}$ at each particular level). In the analyzed example $l_{\max} = 2$ at the first level; $l_{\max} = 5$ at the second level, $l_{\max} = 12$ at the third level.

For writing down the procedure of subdividing into parts and reverse uniting parts to the totality, let us introduce the following symbolic signs: ⊡ for dividing the totality into parts, ⊕ for uniting the parts to the totality.

The correct writing of the procedures of subdividing into parts and reverse uniting parts to the totality.

The procedure of subdividing the totality into parts which are meters:

(initial distance) ⊡ meters ⇨ ($meter_1$), ($meter_2$).

The procedure of subdividing the totality into parts which are decimeters:

(initial distance) ⊡ decimeters⇨ ($decimeter_1$, $decimeter_2$, … $decimeter_{20}$)

The procedure of uniting parts (which are meters) to the totality:

$meter_1$ ⊕ $meter_2$⇒ (initial distance).

The procedure of uniting parts (which are decimeters) to the totality:

$decimeter_1$ ⊕ $decimeter_2$ ⊕… ⊕ $decimeter_{20}$⇒ (initial distance).

Incorrect writing of the procedure of uniting parts to the totality:

$meter_1$ ⊕ $meter_2$ ⊕ $decimeter_1$ ⊕ $decimeter_2$ ⊕… ⊕ $decimeter_{20}$ ⇒ (initial distance).

As a result of the unification of the infinite number of the parts into which any distance or time period can be divided (on the basis of the concept of infinite divisibility), the infinite number of the parts can be obtained. However, those parts being united, we will not obtain the totality, but the infinite number of such totalities. In this very case the quasi-problem of searching for the first or the last movement occurs during the analysis of the Dichotomy paradox.

If the number of the parts obtained at each level of division is designated by the symbol q whose index will denote the subdivision level, the paradoxical, that is, incorrect unification of the parts to the totality will look as follows:

q_1(meters) ⊕ q_2(decimeters) ⊕ q_3(centimeters) ⊕ q_4(millimeters) ⊕… ⊕ q_m(parts of distances at the level of subdivision m, $m \to \infty$) ⇏ (initial distance).

For avoiding contradictions of the analyzed type in the process of thinking, the axiom resembling the content of the absorption law about the union of sets should be introduced to the operations with totalities and parts. It would say that if some subset S is a subset of the set P, after the unification of these sets we will obtain the set S, i.e. if ($S \subseteq P$), ($S \cup P$) = S. For example, if the set "*furniture*" is united with the set "*tables*' (when it is said "*tables and furniture*"), it means the same as "*furniture*", since counting pieces of furniture, we are counting tables as well.

The analogical mereological axiom of absorption (that is, the axiom for the operation with the parts and totalities) can be formulated as follows:

The unification of the totality with its parts is equal to the totality.

Formally this axiom can be written down with the use of one of such three methods:

1. $^{O_t} \oplus o^{t}_{k.l} \equiv {}^{O_t}$.

2. $o^{a,b}_{c,d} \oplus o^{c,d}_{e,f} \equiv o^{a,b}_{c,d}$.

If we assume that x is the part of y in the formula $y = \mathrm{P}x$,

3. $y \oplus x \equiv x$.

For visualizing the source of the contradiction in the aporia of the infinite division into the parts, the following example can be set. Let us assume that a tailor needs to measure the waist of the customer for sewing a piece of clothing. Having measured the waist with the meter, he obtained 7 dm. However, each decimeter contains 10 centimeters, and each centimeter consists of millimeters (and so on *ad infinitum*). Therefore, for measuring the waist he must add the whole number of the sections together, and, accordingly, it will be infinite. The question poses why the tailor dos not act in this way, when he needs to measure some dimensions.

The answer is that if we have a number of decimeters, it is not necessary to sum them with their parts (centimeters), since all these parts have been taken into account during the measurement in decimeters. Never the less, if we add the decimeter and its parts (centimeters) together, the same elements will happen to be measured twice, and if the parts of these parts, namely, millimeters, will be added to the sum, those same sections will be contained in the sum of the measures thrice. When the number of the division levels reaches the infinity, the total dimension will contain the infinite number of the same sections.

On the basis of the carried out research the following conclusions can be drawn:

1. Zeno's reasoning has the following structure: 1) we assume that the motion exists; 2) on the basis of this assumption we conclude that the motion is impossible. However, Zeno only declared that he assumed the existence of motion. If he had actually assumed the existence of the motion, he would have to start with the fact that the motion had already taken place to a certain distance. In this case, by repeating the assumed motion an arbitrary number of times, the object can be moved to the distance of any length (if the object is moved infinitely, it can be moved to the infinite distance). So there should be no contradiction.

2. In an arbitrary completed motion, it is possible to distinguish an infinite number of parts of this motion which began with the beginning of the motion itself, an infinite number of parts which ended together with the end of the motion, and an infinite number of events which began, continued and ended in the period between the beginning and the end of this motion. For the analysis of the beginning of the motion it is necessary to take the time intervals, sizes and speeds of variable parameters being physically justified for each specific type of motion.

3. The use of the formulated mereological axiom on the unification of the parts to the totality provides the opportunity for eliminating the contradictions of the infinite subdivision to the parts as, for example, the Dichotomy, during the thinking process.

References

1. The Works of Aristotle. – Vol. I. – Chicago, London, Toronto: Encyclopedia Britannica, Inc., 1952. – 726 p.
2. Salmon W. The Paradoxes of Motion / Salmon W. C. Space, Time, and Motion. – Minneapolis: University of Minnesota Press, 1980. – 129–149.
3. Hilbert D., Bernays P. Grundlehren der Mathematic. Band I. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1968. – 473 p.
4. Feynman R. P. The Character of Physical Law. – Cambridge, Massachusetts, London: The M.I.T Press, 1985. – 173 p.
5. Russell B. The Principles of Mathematics. – Vol. 1. – Cambridge: University Press, 1903. – 534 p.

Skobelev Volodymyr Gennadievich, Dr. Phys.-Math. Sci., Dr. Tech. Sci, Full Professor,

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine,

Taras Shevchenko National University of Kyiv,

e-mail: skobelevvg@gmail.com;

ALGEBRAIC BACKGROUNDS FOR DATA STRUCTURES MODELS

Skobelev V.G.

Abstract. The main aim of the Algebraic Aggregate Theory is to present uniformly data structures in mathematics and its applications in terms of Universal Algebra. In the given paper are characterized three sub-algebras of the Algebraic Aggregate Theory. These sub-algebras are the sub-algebra of ordered pairs, the successor sub-algebra and the algebra of Semi-Boolean Systems. Some applications of the obtained results for solving mathematical problems and software development are illustrated.

Key words: Semi-Boolean systems, data structures.

1. Introduction. Penetration of information technologies into all fields of mankind activity caused the need to deal with a wide class of super complex applied problems. For effective solution of the vast majority of these problems modern computers and/or clusters as well as the development of the relevant data structures are necessary. The essential characteristics for these data structures are that they should be accurately and uniformly characterized in terms of mathematical models and also they must be the necessary tool for the elaboration of the effective software. It is evident that Algebraic Systems are the most general mathematical models for data structures, and, besides, they give the possibility to solve effectively verification problems in the development process of IT-systems.

The development of data structures in Applied Algorithms Theory [1], as well as the development of Table Algebras [2] and their generalizations [3], have revealed deep internal links between data structures and classic Algebraic Systems (commutative and non-commutative, both). These internal links are based on studying the structure of Boolean algebra, Boolean rings and their generalizations (some short surveys of researches in this area are given in [4, 5]). Especially, the papers [6, 7] should be noted, since they have stimulated intensive researches of Semi-Boolean systems and their applications (see [9, 10, 11, 12, 13], for example).

During the last two decades, the theory of non-associative Algebraic Systems has been developing intensively, primarily due to their successful application in solving problems of information transmission and protection (see [14, 15, 16], for example). For this reason, the

problem of construction of axioms systems for extensions of Semi-Boolean Systems intended for efficient representation and processing of both associative and non-associative Algebraic Systems is relevant. One of such constructions, formulated on the base of Universal Algebra, has been proposed in [17]. Due to high complexity of this Axioms System, it is natural to carry out its study in terms of sub-algebras defined by some of these axioms. This approach makes it possible not only to examine in detail the properties of the Semi-Boolean System defined by the proposed Axioms System but also, when it is necessary, to clarify and/or to detail the respective axioms. Presentation of the results obtained in this direction is the main aim of the given paper.

2. Previous results. The Algebraic Aggregate Theory [17] assumes that we deal with some non-empty set A, in which some element 0 is distinguished. There are defined on the set A the unary operation "$^\circ$", the binary operator "(,)", and two binary operations "$+$"and "$-$", satisfying the following Axioms System (it is supposed that $a,b,c,a',b' \in A$):

$$a-a=0, \tag{1}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c, \tag{2}$$

$$a+b=b+a, \tag{3}$$

$$a+a=a, \tag{4}$$

$$(a+b)-c=(a-c)+(b-c), \tag{5}$$

$$a-(b+c)=(a-b)-c, \tag{6}$$

$$a+(b-a)=a+b, \tag{7}$$

$$a+(a-b)=a, \tag{8}$$

$$(a-b)-c=(a-c)-(b-c), \tag{9}$$

$$a-(b-c)=(a-b)+(a-(a-c)), \tag{10}$$

$$a^\circ=b^\circ \Rightarrow a=b, \tag{11}$$

$$(a,b)=(a',b') \Rightarrow a=a' \,\&\, b=b'. \tag{12}$$

Axioms (1)-(12) imply that the element 0 can be interpreted as the empty set, the unary operation "$^\circ$" can be interpreted as a successor operation, the binary operator "(,)" can be interpreted as an ordered pair, the binary operation "$+$" can be interpreted as the union of two sets, and the binary operation "$-$" can be interpreted as the difference of two sets.

Due to this Axioms System, the relation of partial ordering "$\leq$", and binary operations "$\sqcup$" of the symmetric difference and "$\cdot$" of the intersection have been defined in [17], as follows (it is supposed that $a,b \in A$):

$$a \leq b \Leftrightarrow a-b=0, \tag{13}$$

$$a \Delta b=(a-b)+(b-a), \tag{14}$$

$$a \cdot b=(a+b)-(a \Delta b). \tag{15}$$

It is pointed in [17] that on the base of (1)-(15) the following identities can be proved (it is supposed that $a,b,c \in A$):

$$a-a=b-b, \tag{16}$$

$$a+0=a, \tag{17}$$

$$a-0=a, \tag{18}$$

$$(a-b)+b=b, \tag{19}$$

$$a-(b-a)=a, \tag{20}$$

$$(a-b)-c=(a-c)-b, \tag{21}$$

$$a=(a-b)+(a-(a-b)), \tag{22}$$

$$a\cdot b=a-(a-b), \tag{23}$$

$$a\cdot b=b-(b-a), \tag{24}$$

$$a-(a-b)=b-(b-a), \tag{25}$$

$$a-(b\cdot c)=(a-b)+(a-c), \tag{26}$$

$$a-(b+c)=(a-b)\cdot(a-c). \tag{27}$$

Unfortunately, the evidence of identities (16)-(27) has not been provided in [17]. The difficulties encountered in finding evidence of these identities have been the main reason for analyzing the subsystems of the Algebraic System presented above.

The following inductive approach for converting the operator "(,)" into an algebraic operation on a suitable set has been proposed in [18].

Let $\mathcal{A}=\bigcup_{n=0}^{\infty}A^{(i)}$, where $A^{(0)}=A$ and

$$A^{(n)}=\bigcup_{i=0}^{n-1}\{(x,y)\mid x\in A^{(i)}\ \&\ y\in A^{(n-1-i)}\}\quad (n\in\mathbf{N}). \tag{28}$$

The axiom (12) can be extended from the set A onto the set $\mathcal{A}$ as follows:

$$(\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathcal{A})((x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2\ \&\ y_1=y_2). \tag{29}$$

Due to (28) and (29), for any non-empty set A the sequence $A^{(0)},A^{(1)},\ldots,A^{(n)},\ldots$ consists of non-empty pair-wise non-intersecting sets, i.e. $\mathcal{A}$ is an infinite set for any non-empty set A. Thus, for any non-empty set A the A-associated infinite magma $M_A=(\mathcal{A},\circ)$ can be defined, where $x\circ y=(x,y)$ $(x,y\in\mathcal{A})$. The following properties of this magma have been established:

1. (Theorem 1 in [18]). For any non-empty set A the binary operation in the A-associated magma $M_A=(\mathcal{A},\circ)$ is a surjection $\circ:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\bigcup_{n=1}^{\infty}A^{(n)}$.

2. (Theorem 2 in [18]). For any non-empty set A the A-associated magma $M_A=(\mathcal{A},\circ)$ is a cancellative magma.

3. (Proposition 4 in [18]). For any non-empty set A the A-associated magma $M_A=(\mathcal{A},\circ)$ is not a quasigroup.

The interrelation between elements of the set $\mathcal{A}$ and rooted finite labeled as well as unlabeled binary trees has been studied in [18]. The main result is that the language presented by

all these unlabeled binary trees is some proper non-empty sub-language of the Dyck language $L_{D(2)}$ over the 2-letters alphabet. Besides, it has been illustrated that the magma $M_A = (A, \circ)$ can be used successively as some conceptual model in mathematics and its applications.

In [19] properties of the successor operation "$^\circ$" have been studied. For this purpose, the axiom concerning this operation has been clarified as follows ($a^{n\circ}$ $(a \in A; n \in \mathbf{Z}_+)$ denotes the element $(\ldots(a^\circ)^\circ\ldots)^\circ$ of the set A, such that the operation "$^\circ$" is applied n times):

Axiom 1. For any element $a \in A$ the infinite sequence $a, a^\circ, a^{2\circ}, \ldots$ consists of pair-wise different elements of the set A.

Axiom 2. For any elements $a, b \in A$ the following formula is true: $a^\circ = b^\circ \Rightarrow a = b$.

Axiom 3. For any element $a \in A$ there exists some element $b \in A$ and an integer $n \in \mathbf{Z}_+$, such that $a = b^{n\circ}$, and besides $b \neq c^{m\circ}$ for each element $c \in A$ and each integer $m \in \mathbf{N}$.

Let

$$\mathrm{Core}(A) = \{a \in A \mid (\forall b \in A)(n \in \mathbf{N})(a \neq b^{n\circ})\},$$

and

$$\mathrm{Cl}_\circ(a) = \{a^{n\circ} \mid n \in \mathbf{Z}_+\} \quad (a \in A).$$

Then

$$A = \bigcup_{a \in \mathrm{Core}(A)} \mathrm{Cl}_\circ(a).$$

Besides, due to Axiom 1, for any element $a \in A$ the mapping $a^{n\circ} \to n$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ is an isomorphism between the sequence $a, a^\circ, a^{2\circ}, \ldots$ and the sequence $0, 1, 2, \ldots$, i.e. the Mathematical Induction technique can be applied as a mathematical proof on the set A. We illustrate the value of this factor by the following example.

Example 1. Let $G = (N, T, P, S)$ be the CFG grammar, such that $N = \{S, U, V\}$, $T = \{\alpha, \beta\}$, and P consists of the following productions: $S \to \alpha V \mid \beta U$, $U \to \alpha \mid \alpha S \mid \beta UU$, $V \to \beta \mid \beta S \mid \alpha VV$ (see [20], for example). It is necessary to prove that the language $L(G)$ consists of all strings with equal number of symbols α and β.

We consider the following three hypotheses:

H_1: $S \overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow$ the string $w \in L(G)$ consists of the equal number of symbols α and β.

H_2: $U \overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow$ the string $w \in T^*$ consists of one more α than β.

H_3: $V \overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow$ the string $w \in T^*$ consists of one more β than α.

Let $\mathrm{Core}(A) = \{a, b, c\}$, and the elements of the sets $\mathrm{Cl}_\circ(x) = \{x^{n\circ} \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$ $(x \in \mathrm{Core}(A))$ are interpreted as follows:

$a^{n\circ}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ is the proposition: the hypothesis H_1 is true for all strings $w \in L(G)$, such that $d(w) = n + 2$ (since the minimal length of a string $w \in L(G)$ derivable from S is 2);

$b^{n\circ}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ is the proposition: the hypothesis H_2 is true for all strings $w \in T^*$, such that $d(w) = n+1$ (since the minimal length of a string $w \in T^*$ derivable from U is 1);

$c^{n\circ}$ $(n \in \mathbf{Z}_+)$ is the proposition: the hypothesis H_3 is true for all strings $w \in T^*$, such that $d(w) = n+1$ (since the minimal length of a string $w \in T^*$ derivable from V is 1).

The basis of induction. We must prove that propositions $x^{0\circ}$ $(x \in \mathrm{Core}(A))$ are true.

There exist only two accessible derivations of the length 2 from S: $S \Rightarrow \alpha V \Rightarrow \alpha\beta$ and $S \Rightarrow \beta U \Rightarrow \beta\alpha$. Thus, the proposition $a^{0\circ}$ is true. There exists only one accessible derivation of the length 1 from U: $U \Rightarrow \alpha$. Thus, the proposition $b^{0\circ}$ is true. There exists only one accessible derivation of the length 1 from V: $V \Rightarrow \beta$. Thus, the proposition $c^{0\circ}$ is true.

Inductive hypotheses. Assume that propositions $x^{n\circ}$ $(x \in \mathrm{Core}(A))$ are true for all $n = 0, 1, \ldots, k$.

Induction. We must prove that propositions $x^{(k+1)\circ}$ $(x \in \mathrm{Core}(A))$ are true.

Let us prove that the proposition $a^{(k+1)\circ}$ is true.

Suppose, that $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ $(d(w) = (k+1)+2)$. Then either $w = \alpha w_1$, or $w = \beta w_2$, where $d(w_1) = d(w_2) = k+2$. Thus, either $S \Rightarrow \alpha V \overset{*}{\Rightarrow} \alpha w_1$, or $S \Rightarrow \beta U \overset{*}{\Rightarrow} \beta w_2$.

Since $V \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ $(d(w_1) = k+2)$, then by Inductive hypotheses $w_1 \in T^*$ consists of one more β than α, i.e. $w = \alpha w_1$ consists of the equal number of α and β. Similarly, since $U \overset{*}{\Rightarrow} w_2$ $(d(w_2) = k+2)$, then by Inductive hypotheses $w_2 \in T^*$ consists of one more α than β, i.e. $w = \beta w_2$ consists of the equal number of α and β.

Conversely, let the string $w \in T^*$ $(d(w) = (k+1)+2)$ consists of the equal number of α and β. Then either $w = \alpha w_1$ and $w_1 \in T^*$ consists of one more β than α, or $w = \beta w_2$, and $w_2 \in T^*$ consists of one more α than β.

Since $d(w_1) = d(w_2) = k+2$, then by Inductive hypotheses $V \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ and $U \overset{*}{\Rightarrow} w_2$. Therefore, $S \Rightarrow \alpha V \overset{*}{\Rightarrow} \alpha w_1$ and $S \Rightarrow \beta U \overset{*}{\Rightarrow} \beta w_2$, i.e. $w \in L(G)$.

Let us prove that the proposition $b^{(k+1)\circ}$ is true.

Suppose, that $U \overset{*}{\Rightarrow} w$ $(d(w) = (k+1)+1)$. Since the first step of the derivation is either $U \Rightarrow \alpha S$, or $U \Rightarrow \beta UU$, we get that either $U \Rightarrow \alpha S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha w_1$, or $U \Rightarrow \beta UU \overset{*}{\Rightarrow} \beta w_2 w_3$.

Since $S \overset{*}{\Rightarrow} w_1$ $(d(w_1) = k+1)$, then by Inductive hypotheses w_1 consists of the equal number of α and β, i.e. $w = \alpha w_1$ consists of one more α than β.

Since $U \overset{*}{\Rightarrow} w_2$ $(d(w_2) \le k+1)$ and $U \overset{*}{\Rightarrow} w_3$ $(d(w_3) \le k+1)$, then by Inductive hypotheses each of the strings w_2 and w_3 consist of one more α than β, i.e. $w = \beta w_2 w_3$ consists of one more α than β.

Conversely, let the string $w \in T^*$ $(d(w) = (k+1)+2)$ consists of one more α than β. Then either $w = \alpha w_1$ $(d(w_1) = k+1)$ and $w_1 \in T^*$ consists of the equal number of α and β, or $w = \beta w_2 w_3$ $(d(w_2), d(w_3) \le k+1)$ and each of $w_2, w_3 \in T^*$ consists of one more α than β. Using Inductive hypotheses we get that $U \Rightarrow \alpha S \overset{*}{\Rightarrow} a w_1$ and $U \Rightarrow \beta U U \overset{*}{\Rightarrow} \beta w_2 w_3$.

The proposition $c^{(k+1)\circ}$ can be proved similarly.

This example and examples in [18] are compelling arguments that considered Algebraic System and its subsystems can be effectively used in different Solvers and Theorem Provers.

3. New results. It is assumed that for the sub-algebra $\mathsf{A} = (A; \{0, +, -\})$ $(|A| > 1)$ the following three axioms hold:

Axiom 4. For any elements $a, b \in A$ the following identities expressed only in terms of the operation "+" are true:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \tag{30}$$

$$a + b = b + a, \tag{31}$$

$$a + a = a, \tag{32}$$

$$a + 0 = a. \tag{33}$$

Axiom 5. For any elements $a, b \in A$ the following identities expressed only in terms of the operation "$-$" are true:

$$a - a = 0, \tag{34}$$

$$(a - b) - c = (a - c) - (b - c), \tag{35}$$

$$0 - a = 0, \tag{36}$$

$$a - 0 = a, \tag{37}$$

$$a - (a - b) = b - (b - a). \tag{38}$$

Axiom 6. For any elements $a, b, c \in A$ the following identities are true:

$$(a + b) - c = (a - c) + (b - c), \tag{39}$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \tag{40}$$

$$a + (b - a) = a + b, \tag{41}$$

$$a + (a - b) = a, \tag{42}$$

$$a - (b - c) = (a - b) + (a - (a - c)). \tag{43}$$

Let us consider some consequences from the Axiom 4.

Due to (30)-(33), the magma $(A,+)$ is some commutative idempotent monoid, and the element 0 is the identity element of this monoid. The partial ordering relation "$\leq$" can be defined on the set A as follows:

$$a \leq b \Leftrightarrow a+b=b. \tag{44}$$

Due to (33), the element 0 is the least element of the poset $(A,\leq)$, i.e. $0 \leq a$ for all $a \in A$. The partial ordering relations "$<$", "$\geq$" and on the set A can be defined in the usual way.

Proposition 1. For any elements $a,b,c,d \in A$ the following formula is true:

$$a \leq b \,\&\, c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d. \tag{45}$$

Proof. Since $a \leq b$ then $a+b=b$. Since $c \leq d$ then $c+d=d$. Due to (30) and (31),

$$(a+c)+(b+d)=a+(c+(b+d))=a+((c+b)+d)=a+((b+c)+d)=$$

$$=(a+(b+c))+d=((a+b)+c)+d=(b+c)+d=b+(c+d)=b+d.$$

Since $(a+c)+(b+d)=b+d$, we get $a+c \leq b+d$.

Q.E.D.

Corollary 1. For any elements $a,b,c \in A$ the following formula is true:

$$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c. \tag{46}$$

Proof. Due to (32), $c \leq c$ for each element $c \in A$. Setting $d=c$ in (45), we get (46).

Q.E.D.

The partial ordering relation "$\leq$" gives the possibility to define the following intervals on the poset $(A,\leq)$:

$$[a,b]=\{x \in A \mid a \leq x \,\&\, x \leq b\} \quad (a,b \in A; a \leq b), \tag{47}$$

$$(a,b]=\{x \in A \mid a < x \,\&\, x \leq b\} \quad (a,b \in A; a < b), \tag{48}$$

$$[a,b)=\{x \in A \mid a \leq x \,\&\, x < b\} \quad (a,b \in A; a < b), \tag{49}$$

$$(a,b)=\{x \in A \mid a < x \,\&\, x < b\} \quad (a,b \in A; a < b). \tag{50}$$

The operation "$+$" can be extended to the set of all intervals on the poset $(A,\leq)$. For example, for any intervals $[a,b]$ and $[c,d]$ we set:

$$[a,b]+[c,d]=\{x+y \mid x \in [a,b] \,\&\, y \in [c,d]\}. \tag{51}$$

In the case when the summands are defined by (48)-(50), or the summands are intervals of different types their sum can be defined similarly.

Theorem 1. For any elements $a,b,c,d \in A$ the following inclusion is true:

$$[a,b]+[c,d] \subseteq [a+c,b+d]. \tag{52}$$

Proof. Let $z \in [a,b]+[c,d]$. Due to (51), $z=x+y$ for some $x \in [a,b]$ and $y \in [c,d]$. Due to (47), the inequalities $a \leq x$, $x \leq b$, $c \leq y$ and $y \leq d$ are true. Due to Proposition 1, we get:

$$a \leq x \,\&\, c \leq y \Rightarrow a+c \leq x+y=z,$$

$$x \leq b \,\&\, y \leq d \Rightarrow z=x+y \leq b+d.$$

Due to (47), the inequalities $a+c \le z$ and $z \le b+d$ imply that $z \in [a+c, b+d]$.

Since $z \in [a,b]+[c,d]$ implies that $z \in [a+c, b+d]$, the inclusion (52) is true.

Q.E.D.

The meaning of the Theorem 1 is as follows. The set S of all monoids $(A,+)$ $(|A|>1)$ that satisfy to the Axiom 4 can be partitioned into two subsets $\mathsf{S}_1^{(1)}$ and $\mathsf{S}_2^{(1)}$, where the subset $\mathsf{S}_1^{(1)}$ consists of all monoids $(A,+) \in \mathsf{S}$, such that for any elements $a,b,c,d \in A$ holds the identity $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$, and the subset $\mathsf{S}_2^{(1)}$ consists of all monoids $(A,+) \in \mathsf{S}$, such that for some elements $a,b,c,d \in A$ holds the strict inclusion $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$. It is evident that the structure of the elements of the subset $\mathsf{S}_1^{(1)}$ differs significantly from the structure of the elements of the subset $\mathsf{S}_2^{(1)}$.

For any element $a \in A$ the lower cone a^{∇} and the upper cone a^{Δ} can be defined in the usual way, i.e.

$$a^{\nabla} = \{x \in A \mid x \le a\}, \tag{53}$$

$$a^{\Delta} = \{x \in A \mid a \le x\}. \tag{54}$$

It is evident that for eny element $a \in A$ the lower cone a^{∇} has the least element 0 and the greatest element a, while for the upper cone a^{Δ} we can guarantee only the existence of the least element a.

The operation "$+$" can be extended to the set of all lower cones as well as to the set of all upper cones of the elements of the poset $(A,\le)$ as follows:

$$a^{\nabla} + b^{\nabla} = \{x+y \mid x \in a^{\nabla} \,\&\, y \in b^{\nabla}\}, \tag{55}$$

$$a^{\Delta} + b^{\Delta} = \{x+y \mid x \in a^{\Delta} \,\&\, y \in b^{\Delta}\}. \tag{56}$$

Theorem 2. For any elements $a,b \in A$ the following inclusions are true:

$$a^{\nabla} + b^{\nabla} \subseteq (a+b)^{\nabla}, \tag{57}$$

$$a^{\Delta} + b^{\Delta} \subseteq (a+b)^{\Delta}. \tag{58}$$

Proof. Let $z \in a^{\nabla} + b^{\nabla}$. Due to (55), $z = x+y$ for some $x \in a^{\nabla}$ and $y \in b^{\nabla}$. Due to (53), the inequalities $x \le a$ and $y \le b$ hold for any elements $x \in a^{\nabla}$ and $y \in b^{\nabla}$. Due to Proposition 1, the inequalities $x \le a$ and $y \le b$ imply that $z = x+y \le a+b$, i.e. $z \in (a+b)^{\nabla}$. Since $z \in a^{\nabla} + b^{\nabla}$ implies that $z \in (a+b)^{\nabla}$, then the inclusion (57) is true.

The inclusion (58) can be proved in a similar way.

Q.E.D.

The meaning of the theorem 2 is as follows. The set S of all monoids $(A,+)$ $(|A|>1)$ that satisfy to the Axiom 4 can be partitioned into four subsets $\mathsf{S}_1^{(2)}$, $\mathsf{S}_2^{(2)}$, $\mathsf{S}_3^{(2)}$ and $\mathsf{S}_4^{(2)}$. The subset $\mathsf{S}_1^{(2)}$ consists of all monoids $(A,+)$, such that for any elements $a,b \in A$ the following two

identities hold: $a^{\nabla}+b^{\nabla}=(a+b)^{\nabla}$, and $a^{\Delta}+b^{\Delta}=(a+b)^{\Delta}$. The subset $\mathsf{S}_2^{(2)}$ consists of all monoids $(A,+)$, such that for any elements $a,b\in A$ holds identity $a^{\nabla}+b^{\nabla}=(a+b)^{\nabla}$, and for some elements $c,d\in A$ holds the strict inclusion $c^{\Delta}+d^{\Delta}\subset(c+d)^{\Delta}$. The subset $\mathsf{S}_3^{(2)}$ consists of all monoids $(A,+)$, such that for any elements $a,b\in A$ holds identity $a^{\Delta}+b^{\Delta}=(a+b)^{\Delta}$, and for some elements $c,d\in A$ holds the strict inclusion $c^{\nabla}+d^{\nabla}\subset(c+d)^{\nabla}$. The subset $\mathsf{S}_4^{(2)}$ consists of all monoids $(A,+)$, such that for some elements $a,b\in A$ holds the strict inclusion $a^{\nabla}+b^{\nabla}\subset(a+b)^{\nabla}$, and for some elements $c,d\in A$ holds the strict inclusion $c^{\nabla}+d^{\nabla}\subset(c+d)^{\nabla}$. It is evident that the structure of the elements of the subsets $\mathsf{S}_1^{(2)}$, $\mathsf{S}_2^{(2)}$, $\mathsf{S}_3^{(2)}$ and $\mathsf{S}_4^{(2)}$ is significantly different.

Let $\mathsf{F}_A=\{f_a\}_{a\in A}$ be the family of mappings defined as follows:

$$f_a(x)=x+a \quad (x\in A). \tag{59}$$

Due to (46), any f_a $(a\in A)$ is an isotone mapping. Due to Axiom 4, for any set A $(|A|>1)$ the set $\mathsf{F}_A=\{f_a\}_{a\in A}$ is a commutative monoid of isotone mappings. Moreover, each mapping f_a $(a\in A)$ can be naturally extended on intervals and cones of the poset $(A,\leq)$.

Let us consider some consequences from the Axiom 5.

Due to Axiom 5, $(A,-)$ is a non-commutative magma, and the element 0 is the left zero and the right identity element of this magma.

Proposition 2. The magma $(A,-)$ is a non-associative magma.

Proof. Let's assume the opposite, i.e. that $(A,-)$ is an associative magma. Then for all elements $a,b,c\in A$ the following identity is true:

$$a-(b-c)=(a-b)-c. \tag{60}$$

Substituting $b=0$ and $c=a$ in (60), and applying (36), (37) and (34), we get that for all $a\in A$

$$a-(0-a)=(a-0)-a \Leftrightarrow a-0=a-a \Leftrightarrow a=0.$$

We get contradiction to the assumption that $|A|>1$.

Thus, the assumption that the magma $(A,-)$ is an associative magma is false.

Q.E.D.

Proposition 3. For all elements $a,b\in A$ the identity $(a-b)-a=0$ is true.

Proof. Substituting $c=a$ in (35) and applying (34) and (36), we get that for all $a,b\in A$

$$(a-b)-a=(a-a)-(b-a) \Leftrightarrow (a-b)-a=0-(b-a) \Leftrightarrow (a-b)-a=0.$$

Q.E.D.

Let us consider some consequences from the Axioms 4-6.

Proposition 4. For all elements $a,b\in A$ the following identity is true:

$$a-(a+b)=0. \tag{61}$$

Proof. Substituting $b=a$ and $c=b$ in (40), we get that for all $a,b\in A$ the following identity is true:

$$a-(a+b)=(a-a)-b\,.$$

Applying (34) and (36) to this identity, we get that for all $a,b\in A$ the identity (61) is true.

Q.E.D.

Theorem 3. For any elements $a,b\in A$ the following formula is true:

$$a+b=b\Leftrightarrow a-b=0\,. \tag{62}$$

Proof. Let's assume that $a+b=b$. Due to (61), $a-b=0$, i.e. formula

$$a+b=b\Rightarrow a-b=0\,. \tag{63}$$

is true.

It is evident that (41) can be rewritten as follows:

$$b+(a-b)=a+b\,. \tag{64}$$

Let's assume that $a-b=0$. Due to (64), $a+b=b$, i.e. that formula

$$a-b=0\Rightarrow a+b=b\,. \tag{65}$$

is true.

Formulae (63) and (65) imply that formula (62) is true.

Q.E.D.

Due to (44) and (62), the partial ordering "$\le$"on the set A can be defined as follows:

$$a\le b\Leftrightarrow a-b=0\,.$$

Therefore, in terms of Sets Theory, binary operations "$\sqcup$"and "$\cdot$"defined by (14) and (15) can be naturally interpreted as the symmetric difference and the intersection of sets, respectively.

It seems actual to investigate in details the following special generalization of the sub-algebra $\mathbf{A}=(A;\{0,+,-\})$ $(|A|>1)$.

Let Atoms (|Atoms|>1) be some fixed finite or countable set, π be some fixed partition of the set Atoms. The following sequence of sets can be defined:

$$X_0=\{\varnothing\}\,,$$

$$X_1=\{\{x_i\}|x_i\in\text{Atoms}\}\,,$$

$$X_n=\{S\subseteq\text{Atoms}\mid |S|=n\,\&\,(\forall x_i,x_j\in S)(x_i\ne x_j\Rightarrow x_i\not\equiv x_j(\text{mod}\,\pi))\}\quad(n\ge 2)\,.$$

Let

$$A=\bigcup_{i=0}^{\infty}X_i\,.$$

The operation "$+$" on the set A can be defined as follows. For any $x\in A$ we set $\varnothing+x=x+\varnothing=x$. For any $S_1,S_2\in\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$ the sum S_1+S_2 is determined if and only if $x\not\equiv y(\text{mod}\,\pi)$ for all $x\in S_1$ and $y\in S_2$. If the sum S_1+S_2 is determined, we set:

$$S_1+S_2=S_1\cup S_2\,.$$

It is evident that "$+$" is associative-commutative operation, and it is a partial operation if and only if $\pi \neq \mathbf{0}$.

The operation "$-$" on the set A can be defined by identity:

$$S_1 - S_2 = S_1 \setminus S_2 \quad (S_1, S_2 \in A).$$

The operation "$\cdot$" on the set A can be defined by identity:

$$S_1 \cdot S_2 = S_1 \cap S_2 \quad (S_1, S_2 \in A).$$

The relation $\leq$ of partial ordering on the set A can be defined by the following formula:

$$S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2 \quad (S_1, S_2 \in A).$$

In fact, in terms of this Algebra $\mathbf{A} = (A; \{\varnothing, +, -\})$ $(|A| > 1)$, under supposition that A is a finite set, sub-algebras of the Nominative Sets Algebra have been investigated in [21]. Moreover, it has been shown in [22] that if some linear ordering on the set Atoms is defined then quick algorithms for implementation operations of this Algebra can be designed.

4. Conclusions. In the given paper some researches related with the development of the Algebraic Aggregate Theory proposed in [17] are briefly presented. Examples considered in [18] and in this paper are a compelling argument for the possibility to apply this theory as a mathematical base for the construction and processing of data structures in mathematics and its applications, as well as in different Solvers and Theorem Provers. The use of this theory as some base in the study of nominative sets makes it possible to apply this theory effectively in the development and verification of software.

1. Aho A. Data structures and algorithms / A. Aho, J. Hopcroft, J. Ullman. – Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1983. – 427 pp.

2. Blau H.A. Table algebras / H.A. Blau // European Journal of Combinatorics. – 2009. – Vol. 30. – Issue 6. – P. 1426-1455.

3. Arad Z. Generalized table algebras / Z. Arad, E. Fisman, M. Muzychuk // Israel Journal of Mathematics. – 1999. – Vol. 114. – Issue 1. – P. 29–60.

4. McCune W. Short single axioms for Boolean algebra / W. McCune, R. Veroff, B. Fitelson, K. Harris, A. Feist, L. Wos // Journal of Automated Reasoning. – 2002. – Vol. 29, Issue 1. – P. 1-16.

5. Dadej A. On duality between order and algebraic structures in Boolean systems / A. Dadej, K. Halik // Journal of Mathematics and Applications. – 2013. – No. 36. – P. 35-62.

6. Abbott J.C. Semi-Boolean algebra / J.C. Abbott // Matematički Vesnik. – 1967. – Vol. 4, Issue 40. – P. 177–198.

7. Haglich P.P. Semi-Boolean algebras: empirical logic and rings / P.P. Haglich // Trident Scholar Project Report, No. 117. – Annapolis, Maryland, USA: U.S. Naval Academy, 1982. – 65 pp.

9. Manzonetto G. From λ-calculus to universal algebra and back / G. Manzonetto, A. Salibra // Lecture Notes in Computer Science. – 2008. – Vol. 5162. – P. 479-490.

10. Haglich P.P. Detecting emergent behaviors with semi-Boolean algebra / P.P. Haglich, C. Rouff, L. Pullum // The American Institute of Aeronautics and Astronautics: InfoTech Conference, April 20-22, 2010, Atlanta, Georgia, USA: – 6 pp. – Published Online: 14 Jun 2012. – https://doi.org/10.2514/6.2010-3503

11. Salibra A. Boolean-like algebras / A. Salibra, A. Ledda, F. Paoli, T. Kowalski // Algebra Universalis. – 2013. – Vol. 69, No. 2. – P. 113-138.

12. Ledda A. On semi-Boolean-like algebras / A. Ledda, F. Paoli, A. Salibra // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica. – 2013. – Vol. 52, No.1. – P. 101–120.

13. Kuznetsov E. General Boolean algebras, Boolean rings and extension algebras / E. Kuznetsov, E. Kuznetsova // Mathematical Foundations of Informatics: the 5th conference, July 3-6, 2019, Iasi, Romania: proceedings. – 2019. – P. 181-186.

14. S. Pumplun. The non-associative algebras used to build fast-decodable space-time block codes / S. Pumplun, A. Steele // Advances in Mathematics of Communications. – 2015. – Vol. 9, No. 4. – P. 449-469.

15. Shcherbacov V.A. Elements of quasigroup theory and applications / V.A. Shcherbacov. – Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2017. – 576 pp.

16. Shah T. Literature survey on non-associative rings and developments / T. Shah, A. Razzaque, I. Rehman, M.A. Gondal, M. I. Faraz, K.P. Shum // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 12, No. 2. – P. 370-408.

17. Drugus I. Towards an algebraic set theory for the formalization of data structures / I. Drugus // Mathematical Foundations of Informatics: the 4th conference, July 2-6, 2018, Chisinau, Republic of Moldova: proceedings. – 2018. – P. 73-89.

18. Drugus I. Imbrication algebras – algebraic structures of nesting order / I. Drugus, V.G. Skobelev // Computer Science Journal of Moldova. – 2018. – Vol. 26, no. 3. – P. 233-250.

19. Drugus I. Some developments of Aggregate Theory / I. Drugus, V.G. Skobelev // Mathematical Foundations of Informatics: the 5th conference, July 3-6, 2019, Iasi, Romania: proceedings. – 2019. – P. 171-180.

20. Krithivasan K. Introduction to formal languages, automata theory and computation / K. Krithivasan, R. Rama. – Uttar Pradesh, India: Pearson India Educational Services Pvt.Ltd, 2009. – 425 pp.

21. Skobelev V.G. Set-theoretic analysis of nominative data / V.G. Skobelev, M. Nikitchenko, I. Ivanov // Computer Science Journal of Moldova. – 2015. – Vol. 23, no. 3. – P. 270-288.

22. Skobelev V.G. Nominative data with ordered set of names / V.G. Skobelev, M. Nikitchenko, I. Ivanov // Computer Science Journal of Moldova. – 2017. – Vol. 25, no. 2. – P. 195-216.

Васильченко Андрій Анатолійович, доктор філософії (PhD) з філософії

Інститут філософії ім. Г. С. Сковороди НАН України, Київ, Україна

e-mail: andriy_vasylchenko@hotmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГІКИ ІНТЕНЦІЙНОСТІ ДО АНАЛІЗУ СУБ'ЄКТИВНИХ ОНТОЛОГІЙ

Васильченко А. А.

Abstract. Graham Priest's logic of intentionality and Linda Brakel's theory of primary psychological attitudes have arranged conditions for logical and semantical analysis of our deepest phantasies, wishes, strivings and beliefs. In this paper, I apply the logic of intentionality to the study of subjective ontologies. Subjective ontologies are complexes of unconscious presuppositions of agents concerning the existence and identity of their emotionally significant intentional objects. It becomes clear that subjective ontologies base on personal systems of internal objects and that they are built according to the principles of the Platonist theory of ideas (εἶδη).

Ключові слова: логіка інтенційності, теорія об'єктних стосунків, внутрішні об'єкти, суб'єктивні онтології

Логіка інтенційності, побудована Ґремом Прістом [1], а також теорія первинних («несвідомих») психологічних установок, розроблена Ліндою Брейкел [2], створили передумови для логіко-семантичного аналізу інтенційності наших глибинних фантазій, бажань, прагнень і переконань з огляду на їх проективну природу, досліджену у глибинній психології, зокрема в теорії об'єктних стосунків [3-4]. У цій статті ми застосовуємо логіку інтенційності до аналізу *суб'єктивних онтологій* – комплексів несвідомих припущень дієвців, які стосуються існування та ідентичності їхніх емоційно значущих інтенційних об'єктів.

Теоретичною основою підходу автора до психології інтенційності є теорія об'єктних стосунків (*object relations theory*), яка сформувалася у працях Отто Ранка, Роналда Ферберна, Мелані Кляйн, і була надалі розвинута в роботах Доналда Віннікота, Джона Боулбі, Ігнасіо Матте Бланко, Томаса Огдена та інших [див. 3-4]. Згідно з теорією об'єктних стосунків, ми відчуваємо емоції не лише щодо актуально присутніх зовнішніх об'єктів, а й щодо наших власних ментальних утворень, сформованих на основі раніше інтерналізованих об'єктів нашого досвіду, наприклад, батьківських фігур та інших осіб; і те саме можна сказати щодо об'єктів наших фантазій і несвідомих переконань. Ментальні утворення, про які йдеться, називають внутрішніми об'єктами. Саме крізь внутрішні об'єкти, які становлять квінтесенцію нашого попереднього досвіду, ми сприймаємо зовнішній світ.

На основі логіки інтенційності Пріста в інших роботах автора була побудована логіка проективної інтенційності (LPI), яка являє собою мультимодальну параконсистентну логіку з особливим різновидом релевантної імплікації (так званою

«тригерною імплікацією») та рівністю [5-7]. Основні нововведення LPI в логіку інтенційності такі:

1) Серед інтенційних операторів та предикатів LPI є формальні аналоги первинних (тобто, «несвідомих») установок, таких як фантазія, «хотіння» (первинне бажання) тощо.

2) Тригерна імплікація моделює психологічну каузальність. Ідея формалізації полягає в тому, що певні події (наприклад, інтенційні стани) спричиняють або приводять у дію певні процеси (наприклад, захисні механізми), які призводять до інших подій або станів.

3) На основі LPI побудована аксіоматична теорія проективної ідентифікації, яка дає змогу аналізувати феномени проективної інтенційності.

В результаті цих нововведень, логіка проективної інтенційності надає можливість максимально переорієнтувати ресурси модальних логік і семантики можливих світів на дослідження та формалізацію схем первинного (тобто, несвідомого в сенсі належності до Фройдової системи «несвідоме») мислення.

1. LPI: основні визначення

Задля повноти викладу наведемо в цьому розділі основні визначення логіки проективної інтенційності (детальніше див. [7]).

Розгляньмо мову першого порядку з множиною констант, *n*-місними предикатами, інтенційними операторами та рівністю. Будемо позначати інтенційні оператори прописними грецькими літерами. Зокрема, будемо вживати Φ для позначення фантазії[1]: якщо t – терм і F – формула, $\Phi_t F$ означає 't фантазує, що F'.

Визначимо PI-модель для нашої мови як структуру $<D, B, S, Z, a, I, R, \delta>$, де D – область об'єктів; B – непорожня множина носіїв інтенційних станів, така, що $B \subset D$; S – множина ситуацій, або «можливих світів»[2]; Z – множина «регулятивних» ситуацій (що визначають каузальні закономірності), така, що $Z \subset S$; $a \in S$ – так звана «актуальна ситуація»; I – множина «інтенційних ситуацій» (які містять змісти пропозиційних установок), таке, що $I \subset S$, $Z \cap I = \emptyset$, $a \notin I$; $R \subseteq Z \times U \times U$ – так зване «тригерне відношення» (де $U = S \setminus I$, будемо називати U «множиною реальних ситуацій»), і δ – функція денотації, така, що:

– якщо c – константа, то $\delta(c) \in D$;

– якщо P – n-арний предикат і $w \in S$, то $\delta(P, w)$ – пара $<\delta^+(P, w), \delta^-(P, w)>$, де $\delta^+(P, w) \subseteq D^n$ будемо називати *екстенсіоналом* P у w (множина n-ок, на яких P істинний у w), а $\delta^-(P, w) \subseteq D^n$ назвемо *анти-екстенсіоналом* P у w (множина n-ок, на яких P хибний у w);

– якщо Ψ – інтенційний оператор, то $\delta(\Psi)$ – функція, що відображає кожен $b \in B$ у відношення $C_\Psi{}^b \subseteq S \times I$ («відношення інтенційної комплементарності»: інтуїтивно, $C_\Psi{}^b(w,w')$ якщо і тільки якщо w' реалізує всі Ψ-установки b у w).

---

[1] Фантазія (*phantasy*, термін запроваджено Мелані Кляйн) – це базова несвідома когнітивна установка; див. [2, *105-134*].

[2] Ми вживаємо терміни «ситуація» та «можливий світ» як синоніми. Йдеться про можливі світи «з провалами та пагорбами»; тобто, це такі стани речей, які не вимагають вичерпності у сенсі закону виключеного третього та можуть бути суперечливими.

Окрім того, висунемо дві умови до реальних ситуацій:

– якщо P – n-арний предикат і $w \in U$, то $\delta^+(P, w) \cap \delta^-(P, w) = \emptyset$ (в реальних ситуаціях екстенсіонал і антиекстенсіонал взаємовиключні, тобто виконується закон несуперечності);

– для предикату існування E, якщо $w \in U$, то $\delta^+(\mathrm{E}, w) \cup \delta^-(\mathrm{E}, w) = D$;

– подібним чином, для предиката рівності $\approx$, якщо $w \in U$, то $\delta^+(\approx, w)$ є $\{< d, d >: d \in D\}$ і $\delta^+(\approx, w) \cup \delta^-(\approx, w) = D \times D$ (в реальних ситуаціях рівність та існування поводять себе класичним чином, причому їх екстенсіонали або антиекстенсіонали є однаковими в усіх ситуаціях $w \in U$).

Розглянемо PI-модель M. Насамперед, визначимо оцінку e як відображення множини змінних у D. Далі, визначимо функцію денотації для всіх констант і змінних: якщо c – константа, визначаємо $\delta_e(c)$ як $\delta(c)$; якщо x – змінна, визначаємо $\delta_e(x)$ як $e(x)$. Тепер для будь-якого речення A мови ми можемо задати поняття $w \Vdash_e^+ \mathrm{A}$ (A *істинно* в ситуації w за оцінки e) та $w \Vdash_e^- \mathrm{A}$ (A *хибно* в ситуації w за оцінки e). Визначення істинності та хибності для атомарних формул, класичних операторів і кванторів здійснюється звичайним чином [1, *10-11*]. Визначення для імплікації відрізняється від Прістового:

$$w \Vdash_e^+ \mathrm{A} \to \mathrm{B} \Leftrightarrow w \in Z \text{ і для всіх } v, u \in S, \text{ таких, що } R(w, v, u), \text{ якщо } v \Vdash_e^+ \mathrm{A} \text{ то } u \Vdash_e^+ \mathrm{B}$$

$$w \Vdash_e^- \mathrm{A} \to \mathrm{B} \Leftrightarrow w \in Z \text{ і для деяких } v, u \in S, \text{ таких, що } R(w, v, u), v \Vdash_e^+ \mathrm{A} \text{ і } u \nVdash_e^+ \mathrm{B}$$

Визначення для інтенційних операторів також є відмінними від визначень Пріста:

$$w \Vdash_e^+ \Psi_t \mathrm{A} \Leftrightarrow \text{для всіх } v, \text{ таких, що } C_\Psi^{\delta(t)}(w, v), v \Vdash_e^+ \mathrm{A}$$

$$w \Vdash_e^- \Psi_t \mathrm{A} \Leftrightarrow \text{для деяких } v, \text{ таких, що } C_\Psi^{\delta(t)}(w, v), v \nVdash_e^+ \mathrm{A}$$

Накладемо на C додаткову вимогу:

– Для будь-якого носія b, будь-якого інтенційного оператора Ψ і будь-якої ситуації $w \in S$: якщо для деякого замкненого речення A $w \Vdash^+ \Psi_b$ A, то існує ситуація v, така, що $C_\Psi^b(w, v)$ (*принцип реалізації інтенційних станів*).

Будемо говорити, що замкнена формула F є *загальнозначущою* на класі ситуацій W, якщо і тільки якщо для будь-якої $w \in W$, $w \Vdash^+ \mathrm{A}$. Так, загальнозначуща на моделі формула – це така, яка є істинною у всіх ситуаціях моделі. Замкнену формулу A будемо називати *контингентною* на класі ситуацій W, якщо і тільки якщо ані F, ані ~F не є загальнозначущими на W. Екстраполюючи ці дефініції, можемо також говорити про загальнозначущість і випадковість на PI-моделі та на класі моделей. Аналогічним чином, можемо говорити про *валідність* умовиводу у певній ситуації (локальна валідність), на класі ситуацій, на моделі й на класі моделей.

Тепер ми можемо ввести «тригерну імплікацію». Для будь-яких замкнених речень A, B:

$$w \Vdash_e^+ \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{B} \Leftrightarrow w \Vdash_e^+ \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{B} \text{ і A, B є контингентними на } U$$

$$w \Vdash_e^- \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{B} \Leftrightarrow w \Vdash_e^- \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{B} \text{ і A, B є контингентними на } U$$

Ця дефініція виключає *U*-тавтології (універсальні реальні істини) та *U*-суперечності (універсальні реальні хиби) з числа каузальних зв'язків, що їх моделює тригерна імплікація.

На відношення *R* необхідно накласти додаткову вимогу:

– Для будь-яких замкнених речень A і B та будь-яких ситуацій $w \in Z$, $v \in U$: якщо $w \Vdash^{+} A \longmapsto B$ і $v \Vdash^{+} A$, то існує ситуація *u*, така, що $R(w, v, u)$ (*принцип реалізації можливих процесів*).

Якщо маємо $R(w, v, u)$, то будемо говорити, що *u* є *підсумковою ситуацією* щодо *v*, і *v* є *стартовою ситуацією* щодо *u*.

3. Ідентичність та існування у логіці інтенційності

Логіка проективної інтенційності, так само як і логіка інтенційності Пріста, має два різновиди кванторів: зовнішні та внутрішні. Зовнішній екзистенційний квантор ∃ вимагає майногіанського тлумачення: '∃x A(x)' треба розуміти не як висловлювання про існування чи буття певного об'єкта з рисою A, а як твердження «Щось (якийсь об'єкт) має рису A».[3] Ствердження існування вводять явно, за допомогою екзистенційного предиката E. На додачу до основної зовнішньої квантифікації, пару внутрішніх кванторів визначають наступним чином: $\exists^{E}x\ A(x) \Leftrightarrow \exists x\ (E(x) \wedge A(x))$ «Деякий існуючий об'єкт має рису A»; і $\forall^{E}x\ A(x) \Leftrightarrow \forall x\ (E(x) \supset A(x))$ «Будь-який існуючий об'єкт має рису A» [1, *14*].

Іншою примітною особливістю логіки інтенційності є наявність індексованих інтенційних операторів. Кожен оператор репрезентує певну психологічну установку, яка передбачає пропозиційний зміст. Індекс оператора вказує на носія інтенційності (дієвця). Тобто, якщо *c* означає ім'я, а F – формула, $\Psi_c\ F$ означає «*c* Ψ, що F» (наприклад, «Іван боїться, що він не складе іспит», «Марія хоче, щоб вона звільнилася з роботи», «Петро вірить, що на Марсі є життя» тощо).

Якщо об'єктами класичного майнонгіанського універсуму є речі, які можна помислити або уявити, то універсум об'єктів семантики інтенційності складається з речей, риси та/або відношення яких є пропозиційними змістами психологічних установок дієвців. Оскільки серед згаданих рис і відношень є онтологічні (наприклад, ідентичність та існування), семантика інтенційності відкриває шлях до релятивізації онтології: онтологічні властивості релятивізуються стосовно дієвців та їхніх установок.

Розгляньмо приклад. Припустимо, що Іван вважає ранішню зірку та вечірню зірку різними об'єктами. Цей факт експлікується в логіці інтенційності за допомогою наступного висловлювання:

$$@ \Vdash^{+} B_i \sim (p \approx h),$$

де B – оператор переконання, *i* означає «Іван», *p* – ранішня зірка (*Phosphorus*), *h* – вечірня зірка (*Hesperus*), @ – актуальний світ, $\Vdash^{+}$ означає істинність за будь-якої

[3] Ми вживаємо слово «характеристика» або «риса» у значенні «не онтологічна властивість або троп». Тобто, риси поділяються на «звичайні» та онтологічні; до другої групи належать, наприклад, актуально існувати, бути можливим, бути абстрактним тощо. Логіка інтенційності побудована таким чином, що характеристики в ній зазвичай виражаються предикатами, тоді як онтологічні властивості визначаються спеціальними логіко-семантичними засобами, наприклад кванторами, операторами тощо.

оцінки. Семантично це висловлювання означає, що ранішня та вечірня зірки є відмінними у всіх світах, які реалізують переконання Івана:

у будь-якому світі w, такому, що $C_B^i(@, w)$: $w \Vdash^+ \sim(p \approx h)$,

де C_B^i – відношення інтенційної комплементарності: $C_B^i(@, w)$, якщо й тільки якщо w реалізує всі переконання Івана в актуальному світі.

Таким чином, поряд з ідентичністю (часопросторових) об'єктів в актуальному світі або в його контрфактичних альтернативах, семантика інтенційності надає можливість говорити про ідентичність у різних можливих світах, тобто розглядати додаткові «локальні» ідентичності, кожна з яких пов'язана з конкретним дієвцем і конкретною пропозиційною установкою.

Подібно ідентичності, в семантиці інтенційності релятивізується й існування. Наприклад, Шерлок Холмс не існує в актуальному світі, однак він існує в уяві читача Миколи. Якщо s – Шерлок Холмс, m – Микола, E – предикат існування, I – оператор уяви, то висловлювання про існування Холмса в уяві Миколи запишеться так:

$$@ \Vdash^+ \mathrm{I}_m \mathrm{E}(s).$$

Або, в термінах інтенційної комплементарності:

у будь-якому світі w, такому, що $C_I^m(@, w)$: $w \Vdash^+ \mathrm{E}(s)$.

Іншими словами, висловлювання «Шерлок Холмс існує» буде істинним в усіх тих можливих світах, які реалізують уяву Миколи.

Таким чином, поряд з існуванням часопросторових об'єктів в актуальному світі чи в його контрфактичних альтернативах, семантика інтенційності дає змогу говорити про існування у різних можливих світах, тобто розглядати додаткові «локальні» різновиди існування, кожен з яких пов'язаний з конкретним дієвцем і конкретною пропозиційною установкою.

4. Фантазії Міранди: Прекрасний Принц та інші

Релятивізація онтологічних предикатів у семантиці інтенційності дає змогу застосовувати логіку інтенційності для експлікації та аналізу комплексів несвідомих онтологічних припущень дієвців – *суб'єктивних онтологій.* З семантичного погляду, суб'єктивні онтології – це умови, які обмежують варіації об'єктів, їх рис та стосунків у можливих (інтенційно досяжних) світах.

Локальна ідентичність може відігравати засадничу роль у світосприйнятті особи, якщо вона пов'язана з емоційно навантаженим предикатом. Ідентифікація за предикатом (див. напр. [8, *68 ff.*]) є однією з формальних ознак первинного (тобто, «несвідомого») мислення, поряд із заміщенням зовнішньої реальності ментальними образами, згущенням, зміщенням, наявністю суперечностей та відсутністю часового виміру (див. [9]). Ідентифікація за емоційно навантаженим предикатом породжує *проективну фантазію* (базова первинна когнітивна установка, див. [2, *105-134*]) про внутрішній об'єкт. Фантазія про внутрішній об'єкт – це фонова фантазія подальших проекцій.

Розгляньмо приклад. Уявімо собі Міранду, романтичну дівчину, яка кохає свого нареченого Едвіна, ототожнюючи його з Прекрасним Принцем, який є внутрішнім об'єктом Міранди. Предикат «бути нареченим (Міранди)» відіграє роль емоційно навантаженої підстави ідентифікації; подібні предикати, які активізують фантазію про внутрішній об'єкт, називаються «мітковими». Внутрішній об'єкт може мати декілька міток; наприклад, Міранда може водночас ототожнювати з Прекрасним Принцем свого сусіда Артура за предикатом «гарний і люб'язний». Складовими частинами фантазії про внутрішній об'єкт є також несвідоме уявлення про існування внутрішнього об'єкта та його унікальність. Семантично фантазія як пропозиційна установка означає, що всі її компоненти (пропозиції) будуть істинними в усіх можливих світах, які реалізують цю фантазію.

Проаналізуємо ситуацію Міранди за допомогою логіки проективної інтенційності. Згідно з теорією проективної ідентифікації, з кожним внутрішнім об'єктом пов'язана певна сукупність рис, приписуваних цьому об'єкту первинним процесом, і сукупність усіх таких рис визначає об'єкт однозначно (див. [7, *208-209*].

Якщо m – Міранда, P – предикат, що позначає повну сукупність рис, приписуваних первинним процесом Міранди внутрішньому об'єкту «Прекрасний Принц», а Φ – оператор фантазії, то фантазія про існування внутрішнього об'єкта Міранди має таке формулювання:

$$\exists x\, \Phi_m\, (E(x) \wedge P(x)). \qquad \text{(EIO)}$$

Це висловлювання описує фантазію, що існує внутрішній об'єкт (Прекрасний Принц), який має всі риси зі складу P. Об'єкт, який визначається фантазією (EIO), ми називаємо m-внутрішнім P-об'єктом і позначаємо ob_m^{P}.

Однозначність внутрішнього об'єкта, зокрема, означає, що у «світі фантазій» є тільки один такий об'єкт, так що виконується *принцип сингулярності внутрішнього об'єкта*:

$$\forall x\, \Phi_m\, (P(x) \equiv (x \approx ob_m^{\mathrm{P}})), \qquad \text{(SIO)}$$

де ≡ – це матеріальна еквіваленція. З однозначності внутрішнього об'єкта не випливає несуперечливість його рис. Наприклад, можна фантазувати про «круглий квадрат» або «живих мерців».

Визначимо інтенційний оператор суб'єктивного сприйняття. Суб'єктивне сприйняття – це інтегральна перцептивна установка: вона об'єднує фрагменти фантазій, уяву, переконання і знання, враховуючи при цьому індивідуальність суб'єкта – наприклад, особисті припущення, упередження та ілюзії. Ідея суб'єктивного сприйняття полягає в тому, що кожен сприймає речі у свій власний спосіб. Для довільного суб'єкта s і довільної формули F, введемо позначення $\Pi_s F$ «s суб'єктивно сприймає, що F».

Як ми вже зазначали, проективну ідентифікацію приводять в дію «міткові» риси, або маркери. На відміну від сукупності P, яка не обов'язково є несуперечливою та придатною до актуалізації, мітка піддається спостереженню в актуальних об'єктах; відповідно, мітки мають бути несуперечливими. Теорія проективної ідентифікації

постулює *принцип проективної фантазії*, згідно з яким для будь-якої міткової риси T (наприклад, «гарний та люб'язний» і для будь-якої регулятивної ситуації[4] r

$$r \Vdash^{+} \forall x\, (\Pi_m T(x) \longmapsto \Phi_m (x \approx ob_m^{P} \wedge E(ob_m^{P}) \wedge \forall y\, (P(y) \equiv (y \approx ob_m^{P})))). \qquad \text{(PP)}$$

Цей принцип стверджує, що сприйняття міткової риси призводить до активізації комплексної проективної фантазії, частинами якої є зокрема фантазії про існування та сингулярність внутрішнього об'єкта. Наслідком (PP) є наступний *принцип проективної ідентифікації* (за предикатом):

$$r \Vdash^{+} \forall x\, (\Pi_m T(x) \longmapsto \Phi_m (x \approx ob_m^{P})). \qquad \text{(PI)}$$

Тобто, сприйняття суб'єктом міткової риси свого внутрішнього об'єкта в деякому зовнішньому об'єкті провокує фантазію про тотожність між цими двома об'єктами.

5. Суб'єктивна онтологія Міранди: Прекрасний Принц та інші

Принцип проективної фантазії (PP) семантично означає наступне: всі об'єкти, які мають спільну міткову рису із певним внутрішнім об'єктом, у можливих світах фантазій дієвця ототожнюються між собою. Якщо в деякій ситуації w Міранда сприймає Едвіна як свого нареченого, то в її системі несвідомого виникає фантазія, що внутрішній об'єкт Прекрасний Принц існує, що Едвін є Прекрасним Принцом і що іншого Прекрасного Принца немає (Едвін є єдиним носієм усіх характеристик Прекрасного Принца). З іншого боку, сприйняття Мірандою Артура як «гарного і люб'язного» породжує аналогічну фантазію про те, що Прекрасний Принц існує, Артур є Прекрасним Принцом та іншого Прекрасного Принца немає. Якщо ці дві фантазії активуються водночас, Міранда фантазує, що Едвін і Артур «насправді» є однією й тією ж особою. Звісно, це суперечить реальності, але фантазії не мають узгоджуватися з реальністю.

Радше, у фантазіях створюються уявні альтернативи актуальному світу – альтернативні онтології. Спробуємо глибше розібратись у тому, яку онтологію створює проективна фантазія Міранди.

(1) З-поміж усіх об'єктів, що мають міткові риси Прекрасного Принца, лише Прекрасний Принц існує у фантазіях Міранди та в усіх світах її первинних установок. Едвін і Артур, безперечно, мають актуальне існування, але у світах первинних установок Міранди вони існують тільки як Прекрасний Принц.

(2) Усі об'єкти, що мають міткові риси Прекрасного Принца, у фантазіях (а отже, у всіх світах первинних установок Міранди) виявляються однією й тією ж особою. Для нас, нейтральних спостерігачів, що мешкають в актуальному світі, Едвін і Артур – різні люди; «Едвін» і «Артур» – тверді десигнатори, а «Прекрасний Принц» – м'який дескриптор, який може характеризувати різних людей у різних світах. З погляду первинного мислення Міранди, навпаки, «Едвін» і «Артур» – це два імені однієї й тієї ж особи, Прекрасного Принца.

---

[4] Для цілей аналізу психологічних установок достатньо розглядати PI-моделі з однією регулятивною ситуацією. Регулятивна ситуація містить певні каузальні закономірності, які є незмінними на всій моделі; тобто, вона визначає каузальний порядок, що лежить в основі психологічних подій, що їх ми прагнемо проаналізувати [7, *207*].

(3) Будь-яка міткова риса (наприклад, «гарний і люб'язний») з погляду зовнішнього спостерігача – не більше, ніж просто риса. Проте у фантазії Міранди є лише один об'єкт із такою характеристикою – Прекрасний Принц. Тобто, у світах первинних установок Міранди цей опис функціонує як твердий десигнатор.

Ми розглянули основні особливості онтології, визначеної первинними установками Міранди, базову роль серед яких має фантазія як ключова когнітивна установка системи несвідомого. Однак не менш важливо проаналізувати онтологію, створену вторинними установками, серед яких ключовою є суб'єктивне сприйняття. Як ми вже зазначали, фантазії є складовою частиною суб'єктивного сприйняття; однак вони домінують над сприйняттям лише тоді, коли людина втрачає почуття реальності, наприклад уві сні та у психотичних станах (див. [7, *209*]). Зазвичай же фантазії є більшою чи меншою мірою присутні у світосприйнятті, але вони не керують нами. Враховуючи це, проаналізуємо особливості онтології суб'єктивного сприйняття Мірандою Едвіна та Артура.

(1) У світах суб'єктивного сприйняття Міранди Прекрасний Принц водночас існує (згідно з фантазією про внутрішній об'єкт) і не існує (згідно з почуттям реальності). При цьому, якщо Міранда не втрачає зв'язок із реальністю, він радше не існує, ніж існує. Проте фантазія про Прекрасного Принца, хоч би й у витісненому вигляді, все одно залишається присутньою принаймні на периферії суб'єктивного сприйняття. При цьому Прекрасний Принц у цій фантазії завдяки згущенню може набувати рис і Едвіна, і Артура, і в такому вигляді залишається присутнім на периферії сприйняття в силу своєї емоційної значущості. Натомість Едвін і Артур, які так само водночас і існують, і не існують, радше існують, ніж навпаки.

(2) Так само Едвін і Артур, які згідно з почуттям реальності, притаманному Міранді, сприймаються як різні особи, все ж, в силу присутності фантазії про Прекрасного Принца на периферії суб'єктивного сприйняття, мають у світах цієї установки щось спільне (хоча в реальності можуть бути зовсім і несхожими один на одного): вони обидва чимось схожі на Прекрасного Принца.

(3) Спираючись на своє почуття реальності, Міранда сприймає міткові риси Прекрасного Принца (наприклад, «гарний і люб'язний») цілком реалістично – як м'які дескриптори. Проте в силу неодмінної периферійної присутності фантазії про Прекрасного Принца, ці риси залишаються ціннісно навантаженими. Міранда може помічати, що реальні особи Едвін і Артур є не настільки досконалими, як Прекрасний Принц – перший тому, що він не є гарним і люб'язним, а другий тому, що він не є нареченим Міранди. І тільки сам Принц, попри нереальність, є досконалим носієм усіх своїх характеристик.

(4) Почуття та бажання Міранди можуть бути спрямовані і на зовнішні, і на внутрішні об'єкти. Якщо, як це трапляється, Міранда відчуває любов до Едвіна або Артура через зміщення з внутрішнього об'єкта, то Прекрасний Принц має не лише онтологічну першість у фантазіях, а й привілей бути первинним об'єктом її почуттів та бажань [7, *211-212*].

Якщо Міранда певною мірою усвідомлює свої фантазії та якщо, понад те, вона знається на поезії чи філософії, – вона легко може дати собі раду у висловленні онтології свого світосприйняття. Вочевидь, результатом буде гарна класична теорія, в якій Прекрасний Принц має всю повноту буття в ідеальному світі, а Едвін і Артур – лише тіні або недосконалі копії Принца. Виявляється, первинне мислення, основу якого складають фантазії, накидає на наше світосприйняття стару добру платонівську

картину, в якій внутрішні об'єкти є ейдосами, а реальні речі та особи постають їхніми більш чи менш вдалими екземпліфікаціями.

6. Висновки

Семантика інтенційності, розглянута в онтологічній перспективі, дає змогу уточнити ментальний спосіб буття як «буття в інтенційно можливому світі». Ми можемо асоціювати з кожним суб'єктом і кожною пропозиційною установкою окремий спосіб буття, наприклад «буття у фантазіях Міранди». У можливих світах семантики інтенційності буття тлумачиться як властивість, виражена формальним предикатом існування, і лише в актуальному світі буття пов'язано з актуальним існуванням, ознакою якого є часопросторова втіленість. Внутрішні об'єкти – це сукупності властивостей і тропів, які «існують» лише в можливих світах; хоча у сприйнятті дієвців вони мають статус партикулярій, в дійсності вони є суб'єктивними («приватними») універсаліями.

На прикладі фантазій Міранди ми розглянули, як логіка проективної інтейційності застосовується, з огляду на теорію об'єктних стосунків, до аналізу суб'єктивних онтологій. Ми з'ясували, що суб'єктивні онтології базуються на індивідуальних системах внутрішніх об'єктів і будуються згідно з принципами платонівської теорії ейдосів.

Список використаних джерел

1. Priest G. Towards Non-Being: The Logic and Metaphysics of Intentionality. – Oxford: Oxford University Press, 2005. – 613 p.

2. Brakel L. W. Philosophy, psychoanalysis, and a-rational mind. – Oxford: Oxford University Press, 2009. – 197 p.

3. Greenberg J. R., Mitchell S. A. Object Relations in Psychoanalytic Theory. – Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1983. – 446 p.

4. Summers F. Object Relations Theory and Psychopathology. – New York: Psychology Press, 2014. – 411 p.

5. Васильченко А. А. Анализ психоаналитического дискурса средствами логики интенциональности // Філософські діалоги. – 2014. – Вип. 8. – С. 61–79.

6. Васильченко А. А. Логика проекций // Філософські діалоги. – 2014. – Вип. 8. – С. 176–195.

7. Vasylchenko A. Towards the logic of projective identification // Journal of Applied Logic. – Vol. 13 (2015). – P. 197–214.

8. Arieti S. Creativity. The Magic Synthesis. – New York: BasicBook, 1976. – 448 p.

9. Rayner E., Tuckett D. An introduction to Matte-Blanco's reformulation of the Freudian unconscious and his conceptualization of the internal world // Matte-Blanco I. Thinking, Feeling, and Being. Clinical Reflections on the Fundamental Antinomy of Human Beings and World. – London: Routledge, 2005. – P. 3-34.

Дуцяк Ігор Зенонович, доктор філос. наук, кандидат техн. наук, професор,
Національний університет "Львівська політехніка",
e-mail: Idutsyak@gmail.com

КОНЦЕПЦІЯ ТЕОРІЇ ЛОГІКИ ВІДНОШЕНЬ ІЗ СУБ'ЄКТНО-ПРЕДИКАТНИМ ЗАПИСОМ ВИСЛОВІВ

Ігор Дуцяк

Виконано дослідження, з метою побудови концепції теорії логіки відношень, яка матиме синтаксис максимально наближений до синтаксису природної мови. Побудовано компоненти зазначеної теорії, що мають такі особливості. За основу логічної теорії взято комбіновану логіку класів, що дає змогу: 1) формально виконувати виводи, які ґрунтуються на відношеннях між множинами, 2) зберігати у формальному записі стверджувальних висловів природної мови їх суб'єктно-предикатну структуру. На відміну від логіки предикатів, квантифікують не цілу формулу, якою записують логічну структуру стверджувального вислову, а лише ті вирази, якими позначено суб'єкт і предикат вислову. Коли інформацією про об'єкт є якесь визначене його відношення до іншого (інших) об'єктів, то формальний запис згаданого відношення має таку форму: замість символа властивості в одномісному предикаті (тут термін "предикат" в сенсі логіки предикатів) записують вираз, який містить символ відношення і символи, якими позначають назви об'єктів, до яких є це відношення. Показано, що для виконання виводів на підставі відношень достатньо формального апарату логіки класів.

Ключові слова: логіка відношень, суб'єктно-предикатна структура вислову, комбінована логіка класів, мова логіки.

Суть пізнавальної проблеми, результати дослідження якої викладено в цій публікації, полягає у створенні концепції теорії логіки відношень, мова якої зберігала б суб'єктно-предикатну структуру речення, а відношення логічного випливання ґрунтувалося б на інструментарії теорії множин. Така формальна система була б доступнішою для нефахівців з логіки, водночас її можна було б використовувати й для автоматизації міркувань.

Головною підставою для дослідження, результати якого викладені в цій публікації, стала помітна невідповідність синтаксису мови логіки предикатів синтаксисові природної мови. Аналіз відношення між ними (синтаксисами) мав би бути тематикою окремого напряму досліджень принаймні через те, що природні мови мають відмінності у правилах синтаксису. Але, в будь-якому разі, природна мова спрямована на позначення і сприйняття саме логічних зв'язків. Зважаючи на це, споживачеві знань з логіки було б найзручніше, якщо б структура логічних формалізмів була максимально можливо наближеною до структури природномовних синтаксичних зв'язків.

Підставу для досліджень можна деталізувати низкою міркувань. Суть першого (не в порядку якоїсь важливості, чи хронології) міркування полягає в тому, чи потрібно, щоб логічна структура стверджувального вислову відповідала тема-рематичній (тобто мовній) структурі речення. У традиційній силогістиці, як і в найбільш наближеному до неї сучасному комбінованому численні класів (практично незастосовуваному внаслідок менших виражальних можливостей від логіки предикатів), така відповідність була. Адже суб'єкт вислову (те, про що стверджують) відповідав темі речення, а предикат вислову (те, що саме стверджують про об'єкти позначені суб'єктом вислову) – ремі

речення. У логіці предикатів відмовилися від цієї відповідності синтаксичної будови. Ґотлоб Фреґе так обґрунтовував доцільність такої відмови. Речення “Під Платеями греки перемогли персів”, на його думку, має однаковий зміст як і речення “Під Платеями перси були переможені греками”. На думку Ґотлоба Фреґе той зміст, який треба формалізувати в цих реченнях, є однаковим, а, отже, відтворення відношення між суб’єктом вислову і предикатом вислову (щоб відрізнити термін *предикат* традиційної логіки від терміна *предикат* логіки предикатів, перший з них називатимемо *предикат вислову*) не є істотним для логічного аналізу. Далі Ґотлоб Фреґе зазначив, що початково він намагався створити формальну мову, в якій суб’єкт і предикат вислову були б формально розрізнюваними, однак, це перешкоджало досягненню його власних цілей. З міркуваннями Ґотлоба Фреґе щодо неактуальності відтворення суб’єкт-предикатної структури стверджувальних висловів природної мови у мові логічного числення важко погодитись. Насамперед, це ускладнює сприйняття логічного апарату споживачами, які не є фахівцями в галузі логіки. Крім того, згідно зі зразком прикладу про Платеї можна стверджувати, що вислів “*A* є керівником *B*” є тотожним вислову “*B* є підлеглим *A*”, тоді як це є вивід. Подібно до цього, відкидаючи суб’єкт-предикатну структуру вислову, ми відкидаємо безпосередні виводи традиційної логіки.

Другий аргумент щодо доцільності пошуку досконалішої форми теорії відношень є таким. У природному мовленні, а, отже, й мовленнєвому мисленні, людина не формулює думку в такому вигляді, в якому її будують у логіці предикатів. Загальна структура вислову в логіці предикатів є такою. Спочатку називають кількість кожного виду об’єктів, про відношення між якими стверджуватиметься у вислові (наприклад: для всіх *x*, для деякої кількості *y* і т. д.), а після цього розташовують вираз, в якому зафіксовано відношення між цими об’єктами. Отже, кількість (зафіксована кванторами) стосується всього вислову чи навіть послідовності висловів, тобто цілого міркування. В реальному мовленні ми не будуємо думку відповідно до такої структурі. Кількість об’єктів, про які ми стверджуємо, позначаємо разом із називанням цих об’єктів, тобто квантори розміщені біля понять, а не перед реченням (чи низкою речень). Окрім ускладнення користування таким формалізмом користувачами-нефахівцями, це викликає також заперечення в зв’язку з обмеженими виражальними можливостями такої логічної мови. Зокрема, Даніель Боневак відзначив, що проблема коректної квантифікації не належить до розв’язаних і є однією з проблем сучасної логіки. Він навів чимало прикладів стверджувальних речень з різними варіантами квантифікації, коректний логічний запис яких викликає труднощі. Серед таких – вислови, які ще в XIV ст. аналізував Бурідан, наприклад: “Жодна людина не бачить кожного осла”, “Кінь *A* є більшим від кожної людини” [2, P. 83]. У 60-х, 70-х роках XX ст. увагу багатьох логіків привернули розгалужувані квантори, коректний логічний запис яких також викликає труднощі, як це є, скажімо, в реченні: “Лідер від кожного племені і капітан від кожного полку зустрілись на мирній конференції” [2, P. 112].

Ще один аргумент для побудови логіки відношень у вигляді штучної мови (у виразах якої відтворюється суб’єкт-предикатна структура речення природної мови) є таким. Коли ми формулюємо речення, то властивість позначаємо як множину. Виникає питання: чому ми не можемо позначити як множину також і відношення? Свого часу Вільям Мінто зауважив, що і в Середньовіччі, і в його час інтерпретація назв ознак як назв класів викликала дискусії (хоча для практики виведення це жодної ролі не відіграє) [3, P. 5]. Розгляньмо приклад. Якщо ми візьмемо для аналізу речення “Всі кавуни є ягодами”, то і *кавуни,* і *ягоди* – це назви множин об’єктів, і такий вислів можна аналізувати в категоріях відношень між множинами. Однак у реченні “Всі кавуни є зеленими”, слово *зелені* є назвою ознаки, а не множини об’єктів. Раціональним є

висновок про доцільність незначного спотворення – назву ознаки треба проінтерпретувати як множину об'єктів з цією ознакою і в такому разі всі подібні речення також можна аналізувати в категоріях відношень між множинами (це власне і є повсюдною практикою логіків). Однак, виникає питання, якщо в реченні "Всі кавуни є ягодами" (в якому і назву об'єкта *кавун,* і назву об'єкта *ягода* ми інтерпретуємо як множини) після заміни слова *ягоди* на назву ознаки (*зелені*), ми все одно можемо інтерпретувати прикметник як підставу для виокремлення множини, то чому ми не можемо зробити таке ж після заміни слова *ягода* на *більший від огірка* (як це є в реченні "Всі кавуни є більшими від огірків" (у сенсі *мають більший об'єм*)). Позитивна відповідь на це питання є достатньою підставою для того, щоб, розбудовуючи мову формального числення, записувати в символьному позначенні відношень тільки назву відношення (*більше*) і назву об'єкта/об'єктів, до якого/яких встановлене це відношення (*огірки*) (інтерпретуючи увесь цей вираз (*більші від огірків*) також як множину). Такий формальний запис мовою логіки відповідав би синтаксису природної мови, а, отже, був би бажаним.

Ще однією підставою для пошуку способів побудови теорії відношень, ґрунтованої на суб'єкт-предикатній структурі символьного запису стверджувальних речень природної мови, є таким. У другій половині XIX століття, коли особливо актуальною стала проблема формально-логічного запису виводів на підставі відношень (і в середовищі математиків, і в середовищі філософських логіків), набула поширення ідея, що в основі виводів на підставі відношень лежить принцип тотожної заміни. Йдеться про виводи, в яких предикатом вислову в одному з засновків є відношення до якогось об'єкта (виду об'єктів). Як приклад можна навести такий вивід:

Засновки: Усі кавуни є більшими від огірків. Всі огірки є частиною зелених плодів овочів.

Висновок: Усі кавуни є більшими від частини зелених плодів овочів.

У другому засновку наведеного виводу встановлено тотожність всіх огірків і частини зелених овочів. На цій підставі, внаслідок заміни в першому засновку слова *огірки* на *частина зелених овочів,* отримано висновок. Справді, суть виконаного виводу полягає в заміні назви множини об'єктів, до якої встановлене відношення в першому засновку, на назву тотожної множини об'єктів. Однак, далі декларування принципу тотожності як основи виводів справа не пішла – не було розроблено формального інструментарію для виявлення відношень тотожності, а, отже, й формального методу виконання виводів. Водночас, набула розвитку розроблена Ґотлобом Фреґе, Джузеппе Пеано, Бертраном Расселом теорія логіки предикатів, в яку була інкорпорована логіка відношень Авґуста де Морґана. Тому, дослідження в попередньо згаданому напрямку побудови теорії відношень припинились. Сучасний рівень розвитку математичного інструментарію логіки дає підстави для припущення, що задача, яку ставили перед собою логіки XIX століття (обґрунтування формального підходу до виконання виводів на підставі відношень на основі принципу тотожної заміни), є розв'язною. Тож, виникає думка, чому б не спробувати її розв'язати.

На підставі виконаного аналізу стану досліджень щодо задекларованої пізнавальної проблеми можна сформулювати таку мету дослідження: з'ясувати можливість побудови формального підходу для виконання виводів на підставі відношень, керуючись принципом тотожної заміни. Досягнення цієї мети (у вигляді специфічного розширення теорії силогістичних виводів, виконуваних за допомогою інструментарію комбінованої логіки класів) дало б змогу зберегти суб'єктно-предикатну структуру у синтаксисі формул отриманої логіки відношень. Для

досягнення поставленої мети виконано такі пізнавальні дії: 1) виявлено види засновків, для яких треба обґрунтувати формальні правила виводів на підставі відношень; 2) обґрунтовано згадані формальні правила виводів на підставі відношень (для частини видів виводів).

Насамперед виконаймо перше завдання – з'ясуймо види засновків, для яких мають бути виявлені відношення логічного випливання. За основу візьмемо структуру силогістичного виводу. Цей вивід полягає у встановленні відношення між двома множинами на підставі відношення кожної з них до третьої. Структуру таких виводів можна подати у вигляді: $s - m$, $m - p \vDash s - p$ (наприклад, *усі кавуни мають червону м'якоть*; *усі огірки мають зелену м'якоть; отже, всі кавуни не є огірками*). Символами s, m, p спрощено позначено множини об'єктів, виокремлених за відповідними ознаками (це можна було б детальніше записати так: $S(x)$, тобто об'єкт x з ознакою S; подібно $M(x)$, $P(x)$).

Кожну з множин (виокремлених за ознакою) у вислові можна замінити на множину, виокремлену за відношенням до якихось об'єктів. Наприклад, у вислові *Жоден кавун не є огірком* (у символьному вигляді спрощено це можна записати *s не є m*) зафіксовано відношення між двома множинами, кожна з яких виокремлена за властивістю. Водночас, у вислові *Кожен кавун є більшим від огірка* (у символьному вигляді спрощено це можна записати $s \in Rm$, де R є символом відношення) зафіксовано відношення між двома множинами, одна з яких виокремлена за властивістю (s), а інша – за відношенням до множини об'єктів (Rm), виокремлених за властивістю (m).

Відповідно до того, що в формулах засновків кожна з множин, виокремлених за властивістю, може бути замінена на множину, виокремлену за відношенням, отримуємо набір всіх можливих засновків (а отже й виводів), які розподілимо відразу на три групи:

1. Виводи, для виконання яких достатньо інструментарію комбінованої логіки класів. Це різновиди засновків силогістичних виводів – всі вони підпадають під дефініцію силогістичного виводу (у засновках відношення кожної з двох множин до третьої; у висновку повинно бути відношення між цими двома множинами).

1.1	$s - m$, $m - p$.	1.5	$s - Rm$, $Rm - p$.
1.2	$Rs - m$, $m - p$.	1.6	$Rs - Rm$, $Rm - p$.
1.3	$s - m$, $m - Rp$.	1.7	$s - Rm$, $Rm - Rp$.
1.4	$Rs - m$, $m - Rp$.	1.8	$Rs - Rm$, $Rm - Rp$.

2. Виводи на підставі заміщення властивості у відношенні (заміщення назви множини об'єктів у виразі відношення на підставі принципу тотожності). Наприклад, у разі засновків 2.1 ($s - Rm$, $m - p$) у виразі відношення Rm можна замінити m на p (якщо дотримано принципу тотожності, формальні прояви якого, власне, треба обґрунтувати).

2.1	$s - Rm$, $m - p$.
2.2	$s - m$, $Rm - p$
2.3	$Rs - Rm$, $m - p$.
2.4	$s - m$, $Rm - Rp$.

3. Виводи на підставі композиції відношень. Це виводи, виконувані за правилом транзитивності, чи іншими можливими подібними правилами.

3.1	s – Rm, m – Rp.
3.2	Rs – m, Rm – p.
3.3	Rs – Rm, m – Rp.
3.4	Rs – m, Rm – Rp.

Перша група засновків не стосується виводів на підставі відношень. Отримання висновків у разі засновків третьої групи описується законом транзитивності. Тому, предметом детальнішого дослідження повинні стати насамперед виводи другої групи, а для цього достатньо обґрунтувати формальні правила для одного довільного з варіантів засновків (інші варіанти можна отримати внаслідок звичайної заміни символів).

Візьмемо для подальшого аналізу засновки у вигляді s – Rm, m – p. Треба виокремити різні варіанти цих засновків, для кожного з яких потрібне обґрунтування можливості отримання того чи іншого висновку. Насамперед йдеться про квантифікацію множини об'єктів m. Перед символом m (і в першому, і в другому засновку) може бути квантор "всі", "частина", "якась кількість, тобто частина або всі", кількість, виражена числом. Оскільки результати виведення із засновків, які містять квантор "якась кількість (частина або всі)", є поєднанням результатів виводів із квантором у засновку "частина" з результатами виводів із квантором у засновку "всі", то, насамперед доцільно проаналізувати виводи з кванторами "частина" і "всі". У такому разі маємо чотири варіанти засновків:

1. s – R$\forall m$, m – p. 2. s – R$\forall m$, dm – p.

3. s – Rdm, m – p. 4. s – Rdm, dm – p.

Із цих чотирьох варіантів засновків візьмемо для аналізу перший:

Засновки: s – R$\forall m$

m – p

Висновок: s – R?p

Суть наступної пізнавальної задачі, яку треба розв'язати, полягає в: 1) обґрунтуванні –чи можна щось вивести з цих засновків, 2) якщо можна вивести, то що саме, 3) знаходженні формального методу виконання двох попередніх завдань.

У подальшому викладі треба буде вживати рідко використовувані булеві функції. Тому введемо такі позначення. Якщо, для прикладу, виписати послідовно значення істинності кон'юнкції відповідно до значень аргументів 11, 10, 01, 00, то, отримаємо ряд чисел 1 0 0 0. Проінтерпретуємо цю послідовність значень як одне число в двійковій системі числення і переведемо його в десяткову систему числення – отримаємо 8. Подібно, сильна диз'юнкція виявиться функцією з індексом 6, диз'юнкція – з індексом 14, функція, яка в усіх чотирьох випадках поєднань значень незалежних змінних має значення 1, матиме індекс 15 (таким чином всі 16 двоаргументних функцій отримають індекси від 0 до 15). Позначатимемо функції їхнім індексом, вписаним в кружальце, наприклад кон'юнкцію позначатимемо символом ⑧.

Під час аналізу другого засновку ми встановлюємо відношення всього обсягу множини m до обсягу множини p. Відношення між двома множинами (m і p) описуються двоаргументними булевими функціями. П'ятнадцятьом двоаргументним булевим функціям (шістнадцята – це суперечність) відповідає п'ятнадцять видів відношень між двома множинами, і, відповідно, п'ятнадцять стверджувальних висловів

природної мови. З-посеред них актуальними для аналізу (це випадки, коли жодна з двох множин не є порожньою) є десять. Ці вислови (подано два варіанти формулювань) і відповідні їм булеві функції подано нижче (відповідність між висловами, булевими функціями і відношеннями між множинами зручно простежити на діаграмах Венна):

Усі m ≡ Усі p	Усі m і тільки m є p	1.	m ⑨ p
		2.	m ⑧ p
Усі m ≡ Частина p	Усі m, але не тільки m, є p	3.	m ⑪ p
		4.	m ⑩ p
Частина m ≡ Усі p	Частина m і тільки m є p	5.	m ⑬ p
		6.	m ⑫ p
Частина m ≡ Частина p	Частина m, але не тільки m, є p	7.	m ⑮ p
		8.	m ⑭ p
Усі m ≡ Частина $\bar{p}$	Усі m і тільки m *не* є p	9.	m ⑦ p
Усі m ≡ Усі $\bar{p}$	Усі m, але не тільки m, *не* є p	10.	m ⑥ p

На підставі аналізу відношень між множинами m і p у другому засновку зроблено висновок про вид квантора перед p у шуканому висновку. Можна сформулювати три правила:

1. $((m \cap p) = \varnothing) \rightarrow ((s$ ⓘ $\mathrm{R}\forall m), (\forall m$ ⓙ $p) \vDash \varnothing)$,

де ⓘ ∈ {⑥…⑮}, ⓙ ∈ {⑥, ⑦}.

2. $((m \cap p) \neq \varnothing \wedge (\bar{m} \cap p) \neq \varnothing) \rightarrow ((s$ ⓘ $\mathrm{R}\forall m), (\forall m$ ⓙ $p) \vDash (m$ ⓘ $\mathrm{R}\forall p))$,

де ⓘ ∈ {⑥…⑮}, ⓙ ∈ {⑧, ⑨, ⑫, ⑬}.

3. $(((m \cap p) \neq \varnothing) \wedge ((\bar{m} \cap p) = \varnothing)) \rightarrow ((s$ ⓘ $\mathrm{R}\forall m), (\forall m$ ⓙ $p) \vDash (m$ ⓘ $\mathrm{R}\exists p))$,

де ⓘ ∈ {⑥…⑮}, ⓙ ∈ {⑩, ⑪, ⑭, ⑮}.

Виконане дослідження підтверджує можливість створення теорії відношень, яка ґрунтується на аналізі відношень між множинами і, водночас, використовує мову символів із синтаксисом, близьким до синтаксису стверджувальних висловів природної мови.

1. Frege G. Begriffsschrift und andere Aufsätze. – Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag, 1993. – 124 s.

2. Bonevac D. A history of quantification / Handbook of the History of Logic. – Vol. 11. Logic: A History of its central Concepts. – Amsterdam: Elsevier, 2012. – P. 64–127.

3. Minto W. Logic, Inductive and Deductive. – New York: Charles Scribner's Sons, 1915. – 373 p.

Кривий Сергій Лук'янович, доктор фізико-математичних наук, професор

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: sl.krivoi@gmail.com

Гогерчак Григорій Іванович, аспірант факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: gogerchak.g@gmail.com

ЛОГІКА В МАТЕМАТИЦІ І ІНФОРМАТИЦІ

Кривий С.Л., Гогерчак Г.І.

Анотація. Пропонується короткий огляд застосування методів математичної логіки в математиці та інформатиці. Зокрема, логічні проблеми з використанням аксіоми вибору в математиці, та проблеми застосування методів математичної логіки в інформатиці. Детальніше розглядається зв'язок логіки та автоматів з демонстрацією такого зв'язку на прикладі. Арифметики Пресбургера. Коротко представлено застосування логіки до задач верифікації програмного забезпечення, проблем управління базами даних та знань, використання дескриптивних логік для їх проектування, розпаралелювання програм та теорії ігр

Abstract. A short survey of applications of logical methods in mathematics and informatics is presented. In special case the problems in mathematic deal with using of Choice Axiom and using logical methods in informatics. More details are considered connections with finite automata and logics with demonstration of application automata to Presburger's arithmetic..A short survey the applications of logics methods to verification of programs, control in data bases and knowledge bases and using description logics for their developing, parallelization of programs and game theory.

Ключові слова: логіка, логічні проблеми, автомати, бази даних та знань, лінгвістика.

Вступ. Традиційним застосуванням математичної логіки як метамови було обґрунтування аксіоматики теорії множин. Пізніше, в зв'язку з розвитком науки про обчислення та комп'ютерної техніки, потреби в методах математичної логіки стали першоплановими. Ці потреби сприяли інтенсивному розвитку як класичної логіки (пропозиційної логіки та логіки предикатів), так і некласичної логіки (динамічної, модальної, темпоральної та інших логік). В результаті цього розвитку виникла велика кількість різного роду логік, які є або узагальненнями відомих логік, або модифікаціями цих логік.

В даній роботі пропонується короткий огляд стану справ в області застосувань математичної логіки і, зокрема, в математиці і в більшій мірі в інформатиці.

1. Логічні проблеми в математиці

Необхідність аксіоматичного обґрунтування основ теорії множин спричинило появу аксіоматичної системи, відомої під назвою аксіоматики Цермело-Френкеля (ЦФ). Ця аксіоматика давала строге обґрунтування теорії множин з одного боку і спричинила

шалену критику і, навіть, несприйняття деякими відомими математиками цієї аксіоматики. Дискусії на цю тему серед математиків продовжуються і до цього часу [1].

Основним об'єктом критики в аксіоматиці ЦФ стала **аксіома вибо**ру та еквівалентні їй *аксіоми повної упорядкованості* (теорема Цермело) і *існування максимального ланцюга* в частково упорядкованій множині (лема Цорна). Було встановлено, що аксіоматика ЦФ не повна, оскільки вона не давала відповіді на такі прості питання як існування невимірних за Лебегом множин дійсних чисел , як повністю упорядкувати континуум, яке місце континууму в шкалі потужностей (алефів) і т.п. Крім того, аксіома вибору визвала критику в зв'язку з її наслідками, які з неї випливають. Прикладом такого наслідку є добре відомий *парадокс Банаха-Тарського*, згідно з яким куля радіуса R розбивається на скінченне число частин, з яких без перетинів і пустот між частинами складаються дві кулі того ж радіуса R [2].

В результаті цих дискусій та критики появилася *аксіоми детермінованості*, яку запропонували Мичельський і Штейнгауз у 1962 році. Наслідки цієї аксіоми, як правило, суперечать аксіомі вибору, але вони більше узгоджуються з природною інтуїцією. Ця аксіома дала можливість розв'язати багато таких проблем, які не піддавалися розв'язанню за допомогою аксіоми вибору. Для формулювання аксіоми детермінованості потрібно ввести деякі поняття.

Нехай A – множина, яка складається з нескінченних послідовностей $\alpha=(a_0,a_1,\ldots a_n,\ldots)$ натуральних чисел. Кожна така послідовність визначає гру G_A двох гравців I і II, яка має такий вигляд:

– гравець I пише своє натуральне число a_0;

– гравець II, знаючи хід a_0, пише у відповідь своє число a_1;

– гравець I, знаючи хід a_1, пише у відповідь своє число a_2;

– гравець II, знаючи хід a_2, пише у відповідь своє число a_3 і так далі до нескінченності.

В результаті гри отримуємо нескінченну послідовність α. Якщо ця послідовність належить множині A, то гравець I перемагає в грі, інакше переможцем гри стає гравець II.

Стратегією в грі типу G_A називається довільна функція f, визначена на множині всіх скінченних послідовностей натуральних чисел (до яких відноситься і пуста послідовність довжини 0), зі значеннями в множині натуральних чисел $\boldsymbol{N}$. Стратегія f називається *виграшною для гравця I,* якщо $f*\alpha_{II} \in A$ для довільної послідовності натуральних чисел $\alpha_{II}=(a_1,a_3,a_5,\ldots)$. Отже, стратегія f виграшна для гравця I, якщо він має виграшну стратегію за довільної гри суперника. *Множина A* і *гра* G_A називаються **детермінованими**, якщо один з гравців I або II має виграшну стратегію в грі G_A. Прикладами детермінованих множин є всі скінченні і зліченні множини, берівські простори, борелевські множини.

Аксіома детермінованості. *Кожна множина типу множини A детермінована*.

Користуючись аксіоматикою ЦФ не вдається побудувати недетермінованої множини без застосування аксіоми вибору. А з допомогою аксіоми вибору таку множину можна побудувати. Яку з цих двох аксіом потрібно признати за основну, логіка відповіді не дає і дискусія продовжується.

2. Логіка в інформатиці та проблеми її застосування

Методи математичної логіки в інформатиці і, зокрема, в програмуванні, мають широке застосування (див. наприклад, [3]). Основними областями застосувань логіки в інформатиці виступають:

–*теорія ігр та агентних систем* (застосування різного типу логік для формалізації правил гри, її стратегії, арени, на якій відбувається гра, та аналіз гри з метою пошуку виграшної стратегії, а в теорії мультиагентних систем за допомогою логіки описується поведінка і взаємодія сукупності агентів в системі) [27, 28];

–*специфікація і верифікація програмного забезпечення* (логіка використовується для опису очікуваної поведінки програми та функціонування самої програми, управління процесом виконання програми) [4,5]*;*

–*розподілені і паралельні програми та процеси управління* (некласичні логіки, які враховують час та розгалуженість часу, а також описують процеси, що взаємодіють між собою) [6,7]*;*

–*системи управління базами даних* (перевірка несуперечності бази даних та логічного слідування запитів) [8];

–*розробка баз знань на основі логік* (розробка та побудова на основі цілої низки, як правило, некласичних (дескриптивних) логік коректних баз знань для зображення окремої предметної області чи декількох предметних областей, маніпуляція такими базами) [9];

–*проектування хардвера і розробка електронних мереж* (опис і верифікація коректної поведінки електронних систем) [10,23];

–*експертні системи та системи штучного інтелекту* (розробка на основі логік правил та даних для таких систем, які здатні конкурувати з системами натурального інтелекту) [11];

–*аналіз та обробка природних мов та природо мовних текстів* (синтаксичний та семантичний аналіз речень природної мови, представлення сенсу цих речень у вигляді формул підходящої логіки чи логік, виявлення суперечностей в природо мовних текстах, застосування в лінгвістиці) [12,29];

–*логічне програмування* (логічне програмування є очевидним зв'язком між комп'ютерними обчисленнями та логікою) [25].

2.1. Логіка, автомати, ігри, верифікація

Особливий ефект логіки в інформатиці проявився в її зв'язку з теорією автоматів. Цей зв'язок був настільки переконливим, що існувала думка про те, що за допомогою логіки і автоматів можна розв'язати проблему верифікації програмного забезпечення. Підставою було те, що проблему виконуваності формул деяких широко уживаних у програмуванні логік, зокрема, лінійних темпоральних логік і логік розгалуженого часу можна звести до проблеми акцептації скінченними автоматами структур, на яких виконуються формули цих логік. Важливою особливістю такого взаємозв'язку було те, що модель, на якій перевірялася виконуваність формул і самі формули зображувалися одним і тим самим типом автоматів. А перевірка виконуваності формул зводилась до перевірки пустоти мови, яка алгоритмічно розв'язувана для скінченних автоматів, причому ця перевірка виконувалася в автоматичному режимі. Зокрема, для довільної формули лінійної темпоральної логіки (ЛТЛ) можна побудувати скінченний автомат,

який акцептує всі шляхи (нескінченної довжини), на яких виконується дана формула. Цей зв'язок складає основу систем тестування на моделі (model checking). Пізніше такі системи були розроблені для виразніших темпоральних логік [13,21,22].

Цікавий і зворотний зв'язок, який має місце між логікою і автоматами. Багато властивостей деяких логічних мов були встановлені за допомогою автоматів. Наприклад, доведення розв'язуваності монадичної логіки першого порядку та темпоральних логік виконувалося за допомогою скінченних автоматів (автоматів Бюхі, Мюлера, автоматів над деревами). Ці властивості були встановлені ще в 60-70 роки минулого століття [19,20].

Використовуючи зв'язок темпоральних логік з теорією автоматів, стало можливим строго специфікувати ігри та проводити їх аналіз з метою пошуку виграшної стратегії в грі. За основу такого типу ігор береться описана вище гра G_A двох учасників з певними обмеженнями. Типовими обмеженнями є умова скінченності гри або умова існування виграшної стратегії для одного з гравців, або існування виграшної стратегії для кожного з гравців. Подібним чином використовуються модальні логіки для опису коректної поведінки агентів в мультиагентній системі. Найчастіше тут використовуються динамічна логіка та темпоральні логіки LTL і CTL, симбіоз яких дозволяє пов'язати між собою дії і час, протягом якого агенти взаємодіють в системі. Це також дає можливість застосовувати алгоритми перевірки на моделі для верифікації правильності взаємодії агентів. Для ілюстрації наведемо приклад формалізації гри з використанням логіко-автоматного підходу.

Приклад 1. *Арена гри*. Нехай $P=\{1,2\}$ – множина гравців, $X=\{a_1,a_2\ldots,a_m\}$ – скінченна множина ходів (дій), які можуть робити гравці.

Ареною гри називається скінченний граф $G=(W^1,W^2,R,s_0)$, де W^i множина позицій гравця i в грі, $i \in P$.

Нехай $W=W^1 \cup W^2$, відношення переходів $R: W\times X\rightarrow W$ є частковою функцією, яка називається функцією ходів, а s_0 – початкова вершина гри. Позначимо множину безпосередніх нащадків вершини $s \in W$ як $\vec{s} = \{s' \in W \mid (s,a,s') \in R$ для деякого $a \in X\}$. Вважається, що всі позиції s і $\vec{s}$ не є пустими множинами, всіх позицій на арені скінченне число, але циклам дозволяється повторяти одну і ту саму позицію нескінчене число разів і стратегією передбачено збереження інформації про число повторень позиції.

На арені *гра виглядає як покладання фішки у вершину* s_0. Якщо гравець i має позицію s_0 (тобто $s_0 \in W^i$), то далі він вибирає хід a, який йому підходить, і виконує цей хід. Виконання ходу означає, що фішка з позиції s_0 переноситься в позицію s' таку, що $(s_0,a, s') \in R$. А далі гра продовжується з позиції s'. Формально гра на арені G являє собою нескінченне ребро, яке є позначеним шляхом $s_0,a_0,s_1a_1\ldots$, де $(s_j,a_j, s_{j+1}) \in R$.

Цікавими є *умови перемоги* в грі. Нехай *Plays* означає множину всіх гравців на арені G. Відношення $\leq \subseteq (Plays \times Plays)$, яке є повним бінарним рефлексивним і транзитивним відношенням, означає відношення переваги гравця $i \in P$. Тоді переваги гравців представляються у вигляді скінченного автомата Мюлера $M=(A,f,r_0)$, а виконання такого автомата описує еволюцію гри і відношення переваги таким чином. Нехай *inf(φ)* означає множину станів автомата, які нескінченно часто проходяться на φ, тобто $\varphi = r_0,r_1\ldots$, де $r_i \in A$. Нехай $\rho = r_0,a_0,r_1a_1\ldots$ і $\rho' = r_0,a_0',s_{1r1}'\ldots$ – дві три, Тоді $\rho \leq \rho'$ тоді і тільки тоді коли $inf(\varphi) \angle^i inf(\varphi')$, де $\varphi = r_0,r_1\ldots$, $\varphi' = r_0',r_1'\ldots$, а $\angle^i \subseteq B(A)\times B(A)$, B(A) – булеан множини станів автомата, до якого не входить пуста множина.

Далі вибирається підходяща логіка, в термінах якої формулюються умови закінчення гри, виграшні стратегії, патові ситуації тощо.

Крім систем перевірки на моделі (чекерів) розвиваються системи пошуку доведень в логічних мовах (прувери). Декілька таких систем були побудовані для логіки предикатів першого порядку (система САД в Інституті кібернетики НАН

України, система VAMPIR в університеті м. Манчестер та інші). Основним правилом виведення в цих системах було правило резолюцій, простота реалізації якого сприяла його широкому застосуванню. Застосування правила резолюцій вимагало розв'язання проблеми уніфікації аргументів в предикатах, а ця проблема для найбільш уживаних асоціативно-комутативних теорій першого порядку зводилася до розв'язання систем лінійних діофантових рівнянь над множиною натуральних чисел. Проблема побудови розв'язків таких систем (а, отже, і проблема уніфікації в цілому) належить класу складності NP. Ця складність обмежує сферу застосувань пруверів.

2.2. Логіка, автомати, лінійні обмеження

Для ілюстрації взаємодії логіки і автоматів розглянемо розв'язання задачі виконуваності формул арифметики Пресбургера. В цьому випадку за кожною атомарною формулою будується скінченний автомат без виходів, який акцептує всі моделі цієї формули. Арифметика Пресбургера (АП) являє собою логічну мову для формулювання властивостей цілих натуральних чисел, які виражаються лінійними обмеженнями.

В означенні АП використовується алфавіт змінних $X = \{x, y, \ldots, z, x_1, y_2, \ldots\}$, дві константи 0 і 1 (нульарні операції) і бінарна операція додавання +.

Означення 1. *Термом АП називається*
а) довільна змінна із X і константи 0, 1;
б) якщо t_1 і t_2 терми АП, то $t_1 + t_2$ теж терм АП.

Атомарною формулою АП називається рівність або нерівність між двома термами, тобто вирази $t = t'$ або $t \leq t'$, де t, t' – терми АП.

Формулою АП називається
в) довільна атомарна формула АП,
г) якщо C і C' формули АП, то $C \wedge C'$, $C \vee C'$ – формули АП;
д) якщо C формула АП, то $\neg C, \exists x C, \forall x C$ – формули АП.

Наприклад, вирази $x + 2y = 3z + 1$ *і* $2x + 1 \leq y$ – атомарні формулами АП. Перша з цих формул може бути записана як $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Вільні і зв'язані змінні у формулах АП визначаються стандартним способом: змінна x називається *зв'язаною у формулі* С, якщо вона знаходиться в області дії квантора існування або загальності. В протилежному випадку змінна називається вільною.

Областю інтерпретації формул АП є множина натуральних чисел **N**, в якій символи 0, 1, +, =, $\leq$ мають свій звичайний сенс. *Розв'язком або моделлю формули* $C(x_1, \ldots, x_q)$ називається вектор $c = (c_1, \ldots, c_q) \in \mathbf{N}^q$, який задовольняє формулі C (тобто формула $C(c_1, \ldots, c_q)$ істинна). Якщо для заданої формули АП C існує розв'язок, то говорять, що ця формула виконується. Нехай $C(x_1, \ldots, x_q)$ – атомарна формула АП, вільні змінні якої належать множині $X = \{x_1, \ldots, x_q\}$. При побудові скінченного автомата **A**= (A, X,f, a_0, F), що акцептує розв'язки формули С, використовується двійкове подання натуральних чисел, тобто зображення чисел словами в алфавіті {0, 1}.

Наприклад, число 13 в такому поданні є двійковим словом 1011, а пара (13, 6) набуває вигляду

1 0 1 1

0 1 1 0 .

Символи вхідного алфавіту автомата – це порозрядні двійкові вектори, з яких будується двійкове подання n-ки натуральних чисел. Так для пари (13, 6) символами алфавіту будуть вектори-стовпчики z_1 = [1,0], z_2 = [0,1], z_3 = [1,1], z_4 = [1,0]. Користуючись цим поданням, наведений нижче алгоритм для довільної атомарної формули АП, яка є лінійним обмеженням $a_1x_1 + \ldots + a_qx_q \leq b$, будує скінченний детермінований автомат (ДСА) без виходів, який акцептує розв'язки цього обмеження. Це обмеження записується в скороченому вигляді $(a,x) \leq$ b, де (a,x) означає скалярний добуток векторів $a=(a_1,\ldots,a_q)$ і $x=(x_1,\ldots,x_q)$.

АП-ДСА($(a,x) \leq$ b)
Вхід: атомарна формула $(a,x) \leq$ b над **N**.
Вихід: ДСА **A**=(A,X,f,a_0,F), який акцептує всі розв'язки формули $(a,x) \leq$ b,
Метод:

```
A, f, F := ∅ ; a0 := {b};
W := {b};
while W≠ ∅ do
    pick s from W;
    add s to A;
    if s≥ 0 then add s to F;
    for all z from {0,1}^q do
      j:= ⌊1/2(s−(a,z))⌋
      if j ∉ A then add j to W;
          add (s,z,j) to f;
      fi
    od
od
return((A,X,f,a0,F)).
```

Термінальність і правильність алгоритму АП-ДСА, а також його застосування до рівнянь, можна знайти в монографії [14].

Приклад 2. Скінченний Х-автомат, який акцептує розв'язки лінійного обмеження 2x - y ≤ -1, має алфавіт z_1= [0,0], z_2 = [0,1], z_3 = [1,0], z_4 = [1,1], початковий стан -1, заключний стан 0. Функція переходів автомата задається таким графом переходів:

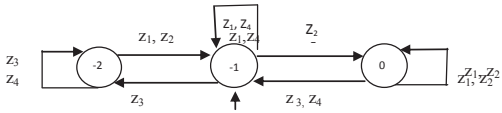


Рис. 2. Автомат, який акцептує розв’язки формули 2x – y ≤-1.

Побудований автомат буде частковим і, в разі необхідності, його можна перетворити до повного детермінованого автомата.

Такий автомат дає можливість розв’язати задачу розбиття заданої множини n-мірних векторів V відносно гіперплощини, заданої формулою $(a,x) \leq$ b, причому це розбиття виконується в лінійному часі за довжиною двійкових слів, які зображують координати векторів [30].

3. Логіка в базах даних, знань,лінгвістиці

На використання логіки в сучасних базах даних (БД) є декілька причин. Ці причини пов'язані з введенням в БД часових залежностей. При цьому використовуються темпоральні логіки, які здатні описувати еволюцію БД в часі. Наприклад, на підставі часово-залежних правила оновлення БД, або деяких глобальних обмеженнях, пов'язаних з часом. Введення та обробка часово-залежної інформації в БД потребує вибору хорошої темпоральної мови, яка дає можливість представляти часово-залежні знання, доступ до таких знань та їх осмислення. Останнє вимагає розвитку логіки дій в часі та побудови нових мов програмування. Якщо час включається до системи штучного інтелекту, то це приводить до не монотонності логічного аналізу ситуацій в процесі функціонування такої системи і для правильності її функціонування потрібна темпоральної бази знань.

Останнім часом, завдяки суттєвим досягненням в штучному інтелекті та математичній лінгвістиці [15,16,17], активно розвиваються системи баз знань. Цей розвиток також стимулюється потребами лінгвістики та проблемами аналізу природо мовних текстів з метою добування з цих текстів знань. На цьому шляху виникли і почали розвиватися *дескриптивні логіки* (ДЛ), які являють собою ціле сімейство логік. Ці логіки мають певну специфіку і здатні розширятися, виходячи з простих розв'язуваних логічних мов. Досягнення в області дескриптивних логік та їх застосувань детально описані в монографії [9]

Основу, з якої починається розширення дескриптивних логік, складає *атрибутна мова* (AL), за допомогою якої описуються так звані атомарні концепти. Першим розширенням цієї мови є мова, яка додає до AL атомарні бінарні відношення (ролі), які визначаються на множині концептів, описаних на мові AL. Подальше розширення мови AL відбувається шляхом додавання конструкторів заперечення і об'єднання концептів, разом з конструкторами числових обмежень на ролі. В результаті дістають мову ALC, яка розв'язувана і тому має алгоритмічну основу. Далі йдуть численні розширення цієї мови в напрямку зростання її виразних можливостей зі збереженням розв'язуваності проблеми виконуваності формул. На основі таких логік будуються бази знань, на яких засобами тієї, чи іншої з логік перевіряється несуперечність такої бази знань та реалізація системи логічного виведення наслідків з побудованої таким чином бази знань. Наведемо основні означення ДЛ.

Синтаксис мови AL визначається такими синтаксичними правилами: нехай C і D довільні концепти і R атомарна роль (бінарне відношення) на концептах, тоді

C, D ::= A (атомарний концепт),

& T (\top) (універсальний концепт),

& $\perp$ (bot) (пустий концепт),

& $\neg$A (заперечення атомарного концепта),

& $C \bigcap D$ (перетин),

& $\forall$ R.C (обмежене значення),

& $\exists$ R. $\perp$ (обмежений квантор існування).

Наведений синтаксис грунтується на теоретико-множинній моделі семантики: нехай O – деяка непуста область інтерпретації I, яка кожному атомарному концепту присвоює множину значень A^I з області інтерпретації O.

Сімейство AL-мов утворюється шляхом додавання до AL-мови таких конструкторів.

Заперечення довільного концепта з інтерпретацією $\neg C^I = O^I \setminus C^I$.

Об'єднання концептів з інтерпретацією $(C \cup D)^I = C^I \cup D^I$.

Повний квантор існування з інтерпретацією $(\exists R.C)^I = \{a \in O^I \mid \exists (a,b) \in R^I \wedge b \in C^I\}$.

Числові обмеження $\geq n$ R(не менше) і $\leq n$ R (не більше), де $n \in N$, з інтерпретацією

$$\geq n\, R^I = \{a \in O^I : |b : \{(a,b) \in R^I| \geq n\} \text{ і } \leq n\, R^I = \{a \in O^I : |\{b : (a,b) \in R\}| \leq n\}$$

відповідно. З точки зору складності виведення припускається, що зображення числа n є двійковим. Розширення AL-мови якою небудь підмножиною конструкторів дає конкретну мову. Якщо до мови AL додається конструктор доповнення концепта, то дістаємо логіку ALC. Як зазначалося вище, ця логіка являє собою ядро всього сімейства дескриптивних логік.

Приклад 3. Нехай множини атомарних концептів і атомарних ролей мають вигляд

CN = {унів, факт, каф, студенти, жін-ст}, RN = {маєу, маєф, маєкф, маєст}.

Тоді концептами ALC будуть

{маєу.факт, маєф.каф, маєкф.студенти, маєст.[студенти $\bigcap$ ¬жін-ст]}.

Суттєвим при використанні дескриптивних логік є те, що вони використовують термінологію даної предметної області (TBox) разом з множиною фактів (ABox), які представлені в цій термінології. Ця обставина дає можливість точніше описувати і представляти предметну область. А це полегшує процес аналізу такої області та його достовірність.

4. Підсумки

Підводячи підсумок зазначимо, що на даний час методи математичної логіки в інформатиці розвиваються в напрямку застосувань, де виникають різного роду модифікації вже існуючих логік. Але не дивлячись на той вплив і позитив, який вносила і вносить математична логіка в інформатику, сфера застосувань її методів має обмежений характер. ***Основною перешкодою*** широкого застосування математичної логіки в інформатиці **є складність її алгоритмів** [18]. Наприклад, перевірка виконуваності простої формули логіки висловлювань з трьома змінними належить класу складності NP, складність перевірки виконуваності формул дескриптивної логіки ALC належить класу складності PSPACE. Навіть якщо складність алгоритму невелика, то складність програми чи системи може мати великі розміри і це стає суттєвою перешкодою на шляху широкого використання логічних засобів. Ця проблема є однією з важливих проблем інформатики, яка має назву проблеми *комбінаторного вибуху*. З цією проблемою намагалися і намагаються боротися різними засобами, але остаточного її розв'язання до цього часу немає.

Слід зазначити, що інтенсивність досліджень в області математичної логіки останнім часом почала спадати. Про це свідчить зменшення кількості публікацій, а також те, що серед математичних проблем 21-го століття не має жодної проблеми, яка відносилася б до області математичної логіки (див. [24]).

Певний прогрес в розвитку методів математичної логіки спостерігається в області нечітких множин та нечіткої логіки. Ця область останнім часом досить інтенсивно розвивається і існують спроби застосування методів класичної логіки для доведення тверджень в нечіткій логіці. Зокрема це стосується методу резолюцій [26]. Складність впровадження методів класичної логіки в нечітку логіку полягає в тому, що в цій логіці методи математичної логіки можуть працювати лише при суттєвих обмеженнях, оскільки без накладання таких обмежень вони не дають правильних результатів.

Література

1. Кановей А.Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. – М.: Наука.–1984. – 64 с.
2. Кац М., Улам С. Математика и логика (ретроспектива и перспективы). – М.:Мир. – 1971.– 250 с.
3. Математическая логика в программировании. Под ред. М.В. Захарьящева и Ю.И. Янова. – М.:Мир.– 1991. – 407 с.
4. Ray S. Formal verification. – Springer. – 2010. –243 p.
5. Baier C., Katoen J-P. Principles of model checking. –The Mit Press. – 2008. – 970 p.
6. Kozen D., Tiuryn J. Logics of programs. – In “Handbook of Theoretical Computer Science”. – Elsevier. – 1990. – PP. 791-839.
7. Quielle J., Sifakis J. Specification and verification of concurrent systems. A temporal logic to deal with fairness. – Acta Informatica. – v. 19. – 1983. – PP. 195-220.
8. Грей П. Логика, алгебра и базы данных. – М.:Машиностроение. – 1989. – 359 с.
9. Baader F., Calvanese D., McGuinness D.L. and other. The Description Logic Handbook. – Cambridge: University Press. – 2010. – 601 p.
10. Meinel C., Theobald T. Algorithms and data structures in VLSI design. OBDD Foudations and Applications. – Springer. – 1998. – 321 p.
11. Thomas W. Automata on infinite objects. In "Handbook of Theoretical Computer Science". – v. B. – 1990 : Elsevier. – PP. 133--191.
12. Hafer T., Thomas W. Computational tree logic CTL* and path quantifiers in the monadic theory of the binary tree. – In T. Ottmann, ed. "14th International colloquium on automata, languages and programming". LNCS.- v. 267. – Berlin: Springer-Verlag. – 1987. – PP. 269 – 279.
13. Emerson E.A., Lei C.L. Modalities for model checking: Branching time logic strikes back. Sci. Computer Programm. – 1987. – v.8. – PP. 275 – 306.
14. Кривий С.Л. Лінійні діофантові обмеження та їх застосування. – Чернівці-Київ: Букрек. – 2015. – 224 с.
15. Рубашкин В.Ш. Представление и анализ смысла в интеллектуальных информационных системах. – М.: Наука. – 1989.–189 с.
16. Logical Aspects of Computational Linquistics. In ed. Bechet D. and Dikovsky A. Proceedings of 7-th Intern. Conference (LALC, Nante, France) . – Springer. –:LNCS. – 2012. – № 7351.
17. Ganesalingam M. The Language of Mathematics. A Linquistic and Philosophical Investigation. – Springer. – LNCS. – 2013. – № 7805. – 260 p.
18. Beyesdorff O., Kutz O. Proof Complexity of Non-Classical Logics. – Springer. – LNCS. – 2012. – № 7388.– PP. 1-88.
19. Buchi J.R. On dtcision method in restricted second order arithmetic. In E Nagel et al eds. Proceed. Intern. Congr. On Logics, Methodology and Philosophy of . Science. – Stanford Univ. Press. – 1960. – PP. 1-11.
20. Church A. Logic, arithmetic and automata. In Proc. Intern. Math. – 1963. – PP. 23-35.
21. Vardi M.Y., Wolper P. An Automata-theoretic approach to automatic program verification. – J. Computer System Science. – 1986. – v. 32. – PP. 183-221.
22. Wolper P. An introduction to model checking. Software Quality Workshop. – 1995. – PP. 16-28.
23. Minato S. Binary Decision Diagrams and applications for VLSI CAD. – Kluwer Academic Publisher. – 1995.–321 p.
24. Smale S. Mathematical problems for the next century. – Mathematics: frontiers and perspectives. Providence, RI: American Mathematics Society. – 2009. – PP. 271-294.
25. Apt K.R. Logic Programming. In "Handbook of Theoretical Computer Science". – Elsevier. – v. B. – 1990. – PP. 495-574.
26. Самохвалов Ю.Я. Доказательство теорем в нечеткой логике на основе структурной резолюции. – ж. Кибернетика и системный анализ. –2019. – т. 55. - №2. – С. 44-58.
27. Grosh S., Ramanujam R. Strategies in Games: A Logic-Automata Study. – Springer.– LNCS.– 2012.– №7388–PP. 110-159.
28. Jamroga W., Penchek W. Specification and Verification of Multy-Agent Systems. – Springer.– LNCS.– 2012.– №7388–PP. 210-263.
29. Дарчук Н.П. Комп'ютерне анотування українського тексту: результати і перспективи. – Київ: Освіта України. – 2013.– 543 с.
30. Kryvyi S.L., Opanasenko V.N., Zavyalov S.B. Partitioning of a set of vectors with integer coordinates by means of the logical hardware. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019, Vol. 55, N 3. P. 462–473.

Нікітченко Микола Степанович, доктор фіз.-мат. наук, професор

Шкільняк Оксана Степанівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Шкільняк Степан Степанович, доктор фіз.-мат. наук, професор

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: mykola.nikitchenko@gmail.com

ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ З КОМПОЗИЦІЄЮ ПРЕДИКАТНОГО ДОПОВНЕННЯ

Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.

A new class of program-oriented logical formalisms is investigated – first-order logics with extended renominations and predicate complement composition. Composition algebras and languages of such logics are described; their semantic properties are investigated. For these logics, a number of logical consequence relations is proposed and investigated, in particular, the logical consequence relations with undefinedness conditions. Properties of these relations form the semantic basis for further construction of sequent-type calculi for the proposed logics.

Keywords: logic, predicate, composition algebra, renomination, logical consequence

Ключові слова: логіка, предикат, композиційна алгебра, реномінація, логічний наслідок

Апарат математичної логіки є основою сучасних програмних систем (див., напр., [1]). Для цього зазвичай використовується класична логіка предикатів та базовані на ній спеціальні логіки. Водночас класична логіка має низку принципових обмежень, що ускладнює її використання в інформатиці й програмуванні. Вона недостатньо враховує частковість, неповноту, інформації, її структурованість. Тому вельми актуальною стає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових квазіарних предикатів (див., напр., [2, 3]). Важливим різновидом програмно-орієнтованих логік, які успішно застосовуються в системах верифікації програм, є логіки Флойда-Хоара [4, 5]. Ці логіки використовують тотальні перед- та після-умови (предикати), тому постала проблема їх розширення на випадок часткових предикатів. Продуктивним напрямком такого розширення є введення спеціальної операції (композиції) предикатного доповнення [6]. КНЛ з композицією предикатного доповнення поєднують можливості КНЛ квазіарних предикатів та логік Флойда-Хоара, такі нові логіки названо LC [7]. LC пропозиційного рівня вивчались в [7], реномінативні LC – в [8]. Семантичні властивості першопорядкових LC досліджено в [9].

Метою пропонованої роботи є дослідження нових класів програмно-орієнтованих логік – чистих першопорядкових LC. Характерною їх особливістю є використання розширених реномінацій та спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для змінних. Описано композиційні алгебри та мови таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Для цих логік запропоновано та досліджено низку відношень логічного наслідку, зокрема, відношень логічного наслідку за умов невизначеності.

Далі в цій роботі КНЛ із розширеними реномінаціями та предикатами-індикаторами наявності значення для змінних будемо називати $\perp$КНЛ, скорочено $\perp$L. На чистому першопорядковому (кванторному) рівні КНЛ та $\perp$КНЛ будемо називати ЧКНЛ та $\perp$ЧКНЛ, будемо їх також позначати L^{Q} та $L_{\perp}^{Q}$. $\perp$КНЛ з композицією предикатного доповнення назвемо $\perp$LC.

На кванторному рівні $\perp$LC позначатимемо $L_{\perp}^{QC}$.

Поняття, які тут не визначаємо, тлумачимо в сенсі [3, 7].

1. Розширені реномінації

Для полегшення читання нагадаємо основні визначення.

Для однозначних функцій пишемо $f(d)\downarrow$, якщо значення $f(d)$ визначене, та $f(d)\uparrow$, якщо значення $f(d)$ невизначене.

Нехай V і A – множини, які будемо трактувати як множину предметних імен (змінних) і множину предметних значень.

V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d: V \to A$.

ІМ подаємо як $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Множину всіх V-A-ІМ позначаємо ${}^VA$.

Для ІМ задамо операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем x: $d\|_{-x} = [v \mapsto a \in d \mid v \neq x]$.

Операцію видалення компонент з іменами $Z \subseteq V$ задаємо так: $d\|_{-Z} = \{v \mapsto a \in d \mid v \notin Z\}$.

Операцію розширеної реномінації $\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1,...,v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp,...,u_m \mapsto \perp]} : {}^VA \to {}^VA$ визначимо так:

$$\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1,...,v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp,...,u_m \mapsto \perp]}(d) = d\|_{-\{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m\}} \cup [v_1 \mapsto d(x_1),...,v_n \mapsto d(x_n)].$$

Тут усі $v_i, x_i, u_j \in V$; спеціальний символ $\perp \notin V$ означає відсутність значення.

Якщо тут $d(x_i)\uparrow$, то компонента з іменем v_i відсутня.

Таку операцію $\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1,...,v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp,...,u_m \mapsto \perp]}$ далі стисло позначаємо $\mathrm{r}^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}$.

Зокрема, маємо $\mathrm{r}^x_\perp(d) = d\|_{-x}$.

Реномінація r з відсутніми параметрами діє як тотожне відображення: $\mathrm{r}(d) = d$.

Введемо для $y_1,...,y_n$ позначення $\overline{y}$. Тоді замість $\mathrm{r}^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}$ пишемо $\mathrm{r}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$.

Традиційна операція реномінації $\mathrm{r}^{\overline{v}}_{\overline{x}}$ [2] є окремим випадком операції $\mathrm{r}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$.

Порядок пар імен в позначенні операції реномінації *не має значення*.

Наприклад, $\mathrm{r}^{v,y,u}_{x,z,\perp}$, $\mathrm{r}^{v,u,y}_{x,\perp,z}$, $\mathrm{r}^{u,y,v}_{\perp,z,x}$ – це різні позначення *однієї й тієї ж* операції.

Розширена реномінація монотонна: якщо $d_1 \subseteq d_2$, то $\mathrm{r}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d_1) \subseteq \mathrm{r}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d_2)$.

Операція розширеної реномінації асоціативна та некомутативна.

Для розширеної реномінації маємо елімінацію тотожних перейменувань:

$$\mathrm{r}^{\overline{z},\overline{v},\overline{u}}_{\overline{z},\overline{x},\perp}(d) = \mathrm{r}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(d).$$

Послідовне застосування двох операцій $\mathrm{r}^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp,\perp}$ та $\mathrm{r}^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp,\perp}$ можна подати у вигляді однієї.

Для кожного $d \in {}^VA$ маємо $\mathrm{r}^{\overline{u},\overline{s},\overline{w},\overline{t}}_{\overline{x},\overline{a},\perp,\perp,\perp}(\mathrm{r}^{\overline{v},\overline{s},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{y},\overline{c},\perp,\perp,\perp}(d)) = \mathrm{r}^{\overline{u},\overline{s},\overline{v},\overline{w},\overline{z},\overline{t}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{y},\perp,\perp,\perp,\perp}(d)$, де кожні $p_i \in \{\overline{p}\}$ та $q_i \in \{\overline{q}\}$ задаємо так:

$$p_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\overline{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } x_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\overline{s}\}, \\ x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{\overline{v}, \overline{s}, \overline{z}, \overline{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\overline{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\overline{t}\}; \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } a_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\overline{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } a_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\overline{s}\}, \\ a_i, \text{ якщо } a_i \notin \{\overline{v}, \overline{s}, \overline{z}, \overline{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\overline{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\overline{t}\}. \end{cases}$$

Так визначену операцію реномінації $\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{v},\bar{w},\bar{x},\bar{t}}_{\bar{p},\bar{q},\bar{y},\perp,\perp,\perp}$ назвемо згорткою операцій реномінації $\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}$ (внутрішня, її застосовуємо першою) та $\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{s},\bar{x},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$ (зовнішня, застосовуємо другою); її позначаємо $\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp} \bullet^{\bar{v},\bar{s},\bar{x},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$. Отже, для кожного $d \in {}^{V}A$ $\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}(\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{s},\bar{x},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d)) = \mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp} \bullet^{\bar{v},\bar{s},\bar{x},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d)$.

2. Композиційні алгебри ⊥ЧКНЛ

Під V-A-квазіарним предикатом розуміємо часткову неоднозначну функцію вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Множину всіх значень, які неоднозначний предикат P може приймати на аргументі (даному) $d \in {}^{V}A$, позначаємо $P[d]$.

В цій роботі розглядаємо неоднозначні (недетерміновані) предикати реляційного типу – R-предикати. Їх трактуємо як відповідності (відношення) між ${}^{V}A$ та множиною $\{T, F\}$.

Кожний R-предикат Q можна однозначно задати за допомогою 2-х множин. Це:

– область істинності $T(Q) = \{d \mid T \in Q[d]\}$;

– область хибності $F(Q) = \{d \mid F \in Q[d]\}$.

Область невизначеності R-предиката Q визначається через $T(Q)$ та $F(Q)$ так:

$$\perp(Q) = \overline{T(Q) \cup F(Q)} = \overline{T(Q)} \cap \overline{F(Q)}.$$

Для $T(Q)$, $F(Q)$, $\perp(Q)$ вживаємо також назви T-область, F-область, $\perp$-область.

R-предикат Q монотонний, якщо: $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \subseteq Q[d_2]$.

R-предикат Q антитонний, якщо: $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \supseteq Q[d_2]$.

R-предикат P:

– частковий однозначний, або P-предикат, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$;

– тотальний, або T-предикат, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^{V}A$; тоді $\perp(P) = \varnothing$;

– тотальний однозначний, або TS-предикат, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$ та $T(P) \cup F(P) = {}^{V}A$;

– неспростовний (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваний, якщо $T(P) \neq \varnothing$;

– тотожно істинний (позн. T), якщо $T(P) = {}^{V}A$ та $F(P) = \varnothing$;

– тотожно хибний (позн. F), якщо $F(P) = {}^{V}A$ та $T(P) = \varnothing$;

– всюди невизначений (позн. ⅄), якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$;

– тотально амбівалентний (позн. ϒ), якщо $T(P) = {}^{V}A$ та $F(P) = {}^{V}A$.

У випадку P-предикатів маємо $T(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = T\}$, $F(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = F\}$.

Маємо 4 константні R-предикати T, F, ⅄, ϒ. Вони відповідають множинам значень $\{T\}$, $\{F\}$, $\varnothing$, $\{T, F\}$, які R-предикат може прийняти на конкретному даному.

Предикати T, F, ⅄, ϒ монотонні й антитонні, при цьому T, F, ⅄ однозначні.

Класи V-A-квазіарних R-предикатів та P-предикатів позначимо $Pr^{V\text{–}A}$ та $PrP^{V\text{–}A}$.

Класи V-A-квазіарних T-предикатів та TS-предикатів позначимо $PrT^{V\text{–}A}$ та $PrTS^{V\text{–}A}$.

Клас $PrTS^{V\text{–}A}$ до певної міри вироджений, усі TS-предикати, за винятком константних T та F, немонотонні й неантитонні.

Спеціальні 0-арні композиції – *предикати-індикатори* Ez – визначають наявність у вхідних даних компоненти з відповідним $z \in V$. Предикати Ez задаємо так:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\};\ F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}.$$

Предикати-індикатори Ez тотальні, однозначні, немонотонні, неантитонні.

Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

Маємо $Ex \vee \neg Ex = \mathrm{T}$, $Ex \,\&\, \neg Ex = \mathrm{F}$.

Таким чином, в ⊥КНЛ можна виділити константні предикати.

Семантична основа КНЛ – композиційні предикатні системи вигляду (${}^{V}A$, $Pr^{V\text{–}A}$, C_B), де C_B – множина базових композицій. Кожна така система задає дві алгебри: алгебру даних (${}^{V}A$, $Pr^{V\text{–}A}$) та композиційну алгебру предикатів ($Pr^{V\text{–}A}$, C_B).

Опишемо базові композиції ⊥ЧКНЛ.

Композиції пропозиційного рівня традиційно називають логічними зв'язками. Вони є аналогами сильних зв'язок Кліні, тому їх називають Клінієвими.

За базові логічні зв'язки *R*-предикатів візьмемо ¬ та ∨, вони задаються так:

$$T(\neg P) = F(P);\ \ F(\neg P) = T(P);$$
$$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q);\ \ F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q).$$

Похідні композиції →, &, ↔ виражаються через базові композиції ¬ та ∨:

$$P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q);\ \ P\to Q = \neg P\vee Q;\ \ P\leftrightarrow Q = (P\to Q)\&(Q\to P).$$

Композиція *розширеної реномінації* $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp} : Pr^{V-A} \to Pr^{V-A}$ задається умовою:

$$\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)[d] = P\,[\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d)].$$

$\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ можна визначити через області істинності та хибності предиката $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$:

$$T(\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)) = \{d\in {}^{V}A \mid \mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d) \in T(P)\};$$
$$F(\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)) = \{d\in {}^{V}A \mid \mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d) \in F(P)\}.$$

Як і для операції реномінації, порядок пар імен в позначенні композиції реномінації не має значення. Наприклад, $\mathrm{R}^{v,y,u}_{x,z,\perp}$, $\mathrm{R}^{v,u,y}_{x,\perp,z}$, $\mathrm{R}^{u,y,v}_{\perp,z,x}$ – різні позначення однієї й тієї ж композиції.

Композиції реномінації $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ є окремим випадком композицій $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$.

Реномінація R без параметрів діє як тотожне відображення: R(*P*) = *P*.

Першопорядкові логіки характеризуються наявністю 1-арних композицій квантифікації ∃*x* та ∀*x*. За базову візьмемо композицію ∃*x*, тоді композиція ∀*x* є *похідною*: ∀*xP* = ¬∃*x*¬*P*.

Композиція ∃*x* задається так:

$$T(\exists xP) = \bigcup_{a\in A}\{d \mid d\nabla x \mapsto a \in T(P)\};\ \ F(\exists xP) = \bigcap_{a\in A}\{d \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P)\}.$$

Для області невизначеності отримуємо:

$$\perp(\exists xP) = \overline{T(\exists xP)\cap F(\exists xP)} = \bigcap_{a\in A}\{d \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P)\cup\perp(P)\}\cap\bigcup_{a\in A}\{d \mid d\nabla x \mapsto a \in\perp(P)\}.$$

Для *P*-предикатів тоді маємо $\perp(\exists xQ) = \bigcap_{a\in A}\{d \mid Q(d\nabla x \mapsto a) \neq T\}\cap\bigcup_{a\in A}\{d \mid d\nabla x \mapsto a \in\perp(P)\}$.

Тому для *P*-предикатів отримуємо:

$$\exists xQ(d)\uparrow \Leftrightarrow\ Q(d\nabla x\mapsto b)\uparrow \text{ для деякого } b\in A \text{ та неможливо } \exists xQ(d) = T.$$

Визначальною особливістю LC є наявність спеціальної немонотонної 1-арної композиції *предикатного доповнення* ~. Композицію ~ задаємо так:

$$T(\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P)\cup F(P)},\quad F(\sim P) = \varnothing.$$

Тоді маємо $\perp(\sim P) = T(P)\cup F(P)$.

Для *P*-предикатів композицію ~ можна задати [7] так:

$$(\sim P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d)\uparrow, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } P(d)\downarrow \end{cases}$$

Клас *P*-предикатів замкнений щодо композицій ¬, ∨, →, &, $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$, ∃*x*, ~.

Водночас композиція ~ не зберігає тотальність *R*-предикатів.

Твердження 1. Для кожного $Q\in Pr^{V-A}$ маємо $\sim Q \in PrP^{V-A}$;

для кожного $Q\in PrT^{V-A}$ маємо $\sim Q = \curlywedge$.

Наслідок. Класи *T*-предикатів та *TS*-предикатів незамкнені щодо ~.

Це означає, що для *T*-предикатів та *TS*-предикатів LC не мають смислу.

В силу незамкненості $PrTS^{V\text{–}A}$ та $PrT^{V\text{–}A}$ щодо $\sim$, а також враховуючи дуальність [2] класів $PrP^{V\text{–}A}$ й $PrT^{V\text{–}A}$ і виродженість $PrTS^{V\text{–}A}$, коректно розглядати лише LC *R*-предикатів та *P*-предикатів.

В загальному випадку *R*-предикатів доцільно розглядати логіки чистого першопорядкового рівня $L\perp^{Q}$ та $L\perp^{QC}$. У випадку *P*-предикатів маємо відповідні логіки $L\perp^{QP}$ та $L\perp^{QCP}$.

Для цих логік маємо такі множини базових композицій:

– $C\perp_{Q} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}, \exists x, Ex\}$ для $L\perp^{Q}$, $L\perp^{QP}$;

– $C\perp_{QC} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}, \exists x, Ex, \sim\}$ для $L\perp^{QC}$, $L\perp^{QCP}$;

Маємо *чисті першопорядкові композиційні системи* *R*-предикатів $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C\perp_{Q})$ та $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C\perp_{QC})$;

Відповідні *чисті першопорядкові композиційні композиційні алгебри* *R*-предикатів:

– $A\perp^{Q} = (Pr^{V\text{–}A}, C\perp_{Q})$;

– $A\perp^{QC} = (Pr^{V\text{–}A}, C\perp_{QC})$;

Клас *P*-предикатів замкнений щодо базових композицій $C\perp_{Q}$ та $C\perp_{QC}$. Тому в $A\perp^{Q}$ та $A\perp^{QC}$ виділяємо такі підалгебри – чисті першопорядкові композиційні алгебри *P*-предикатів:

– $A\perp^{QP} = (PrP^{V\text{–}A}, C\perp_{Q})$;

– $A\perp^{QCP} = (PrP^{V\text{–}A}, C\perp_{QC})$;

Основні властивості пропозиційних композицій аналогічні властивостям класичних логічних зв'язок (див. [10]). Це комутативність $\vee$ та &; асоціативність $\vee$ та &; дистрибутивність для $\vee$ та &; ідемпотентність $\vee$ та &; закони поглинання; закони де Моргана; зняття подвійного заперечення; закон контрапозиції.

Маємо традиційні (див. [10]) властивості композицій квантифікації: комутативність однотипних кванторів; закони де Моргана для кванторів; неістотність квантифікованих імен:

Твердження 2. Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}$, $\exists x$ зберігають тотальність, монотонність і антитонність предикатів.

Твердження 3. Нехай $z \in V$ неістотне для *P*. Тоді $\mathrm{R}^{z,\overline{v},\overline{u}}_{y,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$.

Твердження 4. Ім'я $x \in V$ неістотне для $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},x}_{\overline{y},\perp,\perp}(P)$, якщо $x \notin \{\overline{y}\}$.

Теорема 1. Властивості, пов'язані з композицією розширеної реномінації:

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація;

R⊥I) $\mathrm{R}^{z,\overline{v},\overline{u}}_{z,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$;

R⊥U) Нехай $z \in V$ неістотне для *P*; тоді $\mathrm{R}^{z,\overline{v},\overline{u}}_{y,\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$;

R⊥¬) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\neg P) = \neg \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P)$;

R⊥∨) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P \vee Q) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) \vee \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Q)$;

R⊥R) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp} \circ^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)$ – згортка реномінацій.

Згортку композицій реномінації задаємо через згортку операцій реномінації: для всіх $P \in Pr^{V\text{–}A}$ та $d \in {}^{V}A$ маємо $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp} \circ^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)(d) = (\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp}(P)))(d) = P(r^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp} \bullet^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d)) = P(r^{\overline{u},\overline{t}}_{\overline{x},\perp} \bullet^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(d))$.

Ren) якщо *z* неістотне для *P*, то $\exists yP = \exists z\mathrm{R}^{y}_{z}(P)$ – перейменування кванторного імені;

R⊥∃s) $\exists y\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\exists yP)$ за умови $y \notin \{\overline{v}, \overline{x}, \overline{u}\}$ – проста R∃-дистрибутивність;

R⊥∃) $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp} \circ^{y}_{z}(P)$, де $z \notin \{\overline{v}, \overline{x}, \overline{u}\}$ неістотне для *P* – R∃-дистрибутивність.

Елімінація кванторів базується на таких властивостях.

Теорема 2. $T(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists xP))$ (T∃v⊥)

$F(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists xP)) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(P))$ (F∃v⊥)

$$T(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(P)) \subseteq F(Ey) \cup T(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists xP)) \qquad (\mathrm{T}\exists\mathrm{u}\perp)$$

$$F(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w}}_{\overline{v},\perp}(\exists xP)) \subseteq F(Ey) \cup F(\mathrm{R}^{\overline{u},\overline{w},x}_{\overline{v},\perp,y}(P)) \qquad (\mathrm{F}\exists\mathrm{u}\perp)$$

Твердження 5. Властивості реномінації предикатів-індикаторів:

– $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,\perp}(Ez) = \mathrm{F}$; зокрема, $\mathrm{R}^{z}_{\perp}(Ez) = \mathrm{F}$;

– $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,y}(Ez) = Ey$; зокрема, $\mathrm{R}^{z}_{y}(Ez) = Ey$;

– $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Ez) = Ez$, якщо $z \notin \{\overline{v},\overline{u}\}$; зокрема: $\mathrm{R}^{v}_{w}(Ez) = Ez$; $\mathrm{R}^{u}_{\perp}(Ez) = Ez$.

Усі предикати вигляду $R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{w},\perp}(Ey)$ є тотальними, для них $\perp(R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{w},\perp}(Ey)) = \varnothing$.

Твердження 6. Властивості предикатів-індикаторів, пов'язані з їх квантифікацією:

– $\exists x\, Ex = \neg\exists x \neg Ex = \forall x\, Ex = \mathrm{T}$,

– $\exists x \neg Ex = \neg\exists x\, Ex = \forall x \neg Ex = \mathrm{F}$;

– $\exists y\, Ex = = \neg\exists y \neg Ex = \forall y\, Ex = Ex$;

– $\exists y \neg Ex = \neg\exists y\, Ex = \forall y \neg Ex = \neg Ex$.

Наявність в $\perp$L предикатів-індикаторів Ez дає змогу різними способами задати константні предикати T та F. Найпростіші подання: $\neg Ez \vee Ez = \mathrm{T}$, $\neg Ez \,\&\, Ez = \mathrm{F}$.

Опишемо властивості, пов'язані з композицією предикатного доповнення.

Твердження 7. Згідно визначень отримуємо:

$$F(\neg\sim P) = T(\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)};$$

$$T(\neg\sim P) = F(\sim P) = \varnothing;$$

$$\perp(\neg\sim P) = \perp(\sim P) = T(P) \cup F(P).$$

Твердження 8. $\sim\neg Q = \sim Q$; $\sim\sim\sim Q = \sim Q$; $\sim\sim\sim\sim Q = \sim\sim Q$.

Для $Q \in PrP^{V-A}$ додатково маємо: $\sim\sim Q = Q \vee \neg Q$.

Таким чином, багатократне застосування композиції $\sim$ зводиться до 1-кратного та до 2-кратного її застосування.

Твердження 9. Дія $\sim$ на константні предикати: $\sim\curlywedge = \mathrm{T}$ та $\sim\mathrm{T} = \sim\mathrm{F} = \sim\Upsilon = \curlywedge$.

Справді, для кожного $d \in {}^{V}A$ маємо $\sim\curlywedge(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } \curlywedge(d)\uparrow, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } \curlywedge(d)\downarrow \end{cases} = T.$

Предикати T, F, Υ тотальні, тому $\sim\mathrm{T} = \sim\mathrm{F} = \sim\Upsilon = \curlywedge$ згідно твердження 1.

Твердження 10. $Q \vee \neg Q \vee \sim Q = \mathrm{T}$; $\sim(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = \curlywedge$.

Справді, $T(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = T(Q) \cup F(Q) \cup \overline{T(Q) \cup F(Q)} = {}^{V}A$;

$F(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = F(Q) \cap F(\neg Q) \cap F(\sim Q) = F(Q) \cap T(Q) \cap \varnothing = \varnothing$.

Із визначень отримуємо властивість $\mathrm{R}_{\perp}\sim$-дистрибутивності:

$\mathrm{R}_{\perp}\sim)$ $\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(\sim Q) = \sim\mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Q)$.

3. Мови $\perp$ЧКНЛ

Опишемо мови $\perp$ЧКНЛ. Зауважимо, що із синтаксичного погляду мови $L_{\perp}^{QC}$ та $L_{\perp}^{QCP}$ однакові, їх відмінність – у різних класах інтерпретацій. Алфавіт мови:

– множина V предметних імен (змінних),

– множина Ps предикатних символів – сигнатура мови,

– множина $Cs = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}, Ex, \exists x, \sim\}$ символів базових композицій.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул мови:

– кожний $p \in Ps$ та кожний Ex є формулою; такі формули атомарні;

– нехай $\Phi, \Psi \in Fr$; тоді $\neg\Phi \in Fr$, $\vee\Phi\Psi \in Fr$, $R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}\Phi \in Fr$, $\exists x\Phi \in Fr$, $\sim\Phi \in Fr$.

Множину неістотних для $p \in Ps$ імен задамо за допомогою відображення $\nu : Ps \to 2^V$. Для задання множини гарантовано неістотних для формул імен таку ν продовжимо до $\nu : Fr \to 2^V$:

$$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi);$$
$$\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi);$$
$$\nu(R^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m}_{x_1,\ldots,x_n,\perp,\ldots,\perp}\Phi) = (\nu(\Phi) \cup \{v_1,\ldots,v_n,u_1\ldots,u_m\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \nu(\Phi)_{i \in 1,\ldots,n}\};$$
$$\nu(Ex) = V \setminus \{x\};$$
$$\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi) \cup \{x\};$$
$$\nu(\tilde{}\Phi) = \nu(\Phi).$$

Задамо множину $V_T \subseteq V$ тотально неістотних імен, тобто імен, неістотних для всіх $p \in Ps$:

$$V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$$

Розширена сигнатура мови $L_\perp^{QC}$ – це $\Sigma = (V, V_T, Cs, Ps)$.

Теорема 3. Якщо $x \in \nu(\Phi)$, то x неістотне для формули Φ.

Інтерпретуємо мову $L_\perp^{QC}$ на композиційних системах CS = $({}^VA, Pr^{V-A}, C_{\perp QC})$.

Символи базових композицій інтерпретуємо як відповідні композиції, символи Ex – як відповідні предикати-індикатори Ex. Задаємо тотальне однозначне $I : Ps \to PrP^{V-A}$, яке продовжимо до відображення інтерпретації $I : Fr \to PrP^{V-A}$:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)),\ I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)),$$
$$I(R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}\Phi) = \mathrm{R}^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(I(\Phi)),\ I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)),\ I(\tilde{}\Phi) = \tilde{}(I(\Phi)).$$

Трійку $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$ назвемо *інтерпретацією* мови $L_\perp^{QC}$.

Скорочено інтерпретації мови позначаємо як (A, I).

Предметне ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_J.

Мову $L_\perp^{Q}$ визначаємо аналогічно мові $L_\perp^{QC}$, опускаючи пункти, пов'язані з символом $\tilde{}$.

Класи інтерпретацій мови називають семантиками.

У випадках $L_\perp^{Q}$ та $L_\perp^{QC}$ маємо семантики $\perp\boldsymbol{R}$, $\perp\boldsymbol{R_C}$ та $\perp\boldsymbol{P}$, $\perp\boldsymbol{P_C}$.

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позн. $\boldsymbol{J} \models \Phi$, якщо предикат Φ_J – неспростовний. Формула Φ неспростовна (частково істинна) в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$, що позн. ${}^{\alpha}\!\models \Phi$, якщо $\boldsymbol{J} \models \Phi$ при кожній $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi$), якщо $\Phi_J = \mathrm{T}$.

Формула Φ тотожно істинна в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ (позн. ${}^{\alpha}\!\models_{id} \Phi$), якщо $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi$ при кожній $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Якщо семантика $\boldsymbol{\alpha}$ зафіксована, то замість ${}^{\alpha}\!\models$, ${}^{\alpha}\!\models_{id}$ пишемо $\models$, $\models_{id}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо предикат Φ_J – виконуваний.

Формула Φ виконувана в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$, якщо Φ виконувана при деякій $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Із визначень отримуємо: $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi \Rightarrow \boldsymbol{J} \models \Phi$ та $\models_{id} \Phi \Rightarrow \models \Phi$.

В $\perp$КНЛ множини неспростовних і тотожно істинних формул непорожні:

Приклад 1. Згідно $Ex \vee \neg Ex = \mathrm{T}$ маємо ${}^{\alpha}\!\models_{id} Ex \vee \neg Ex$.

На основі твердження 9 отримуємо

Приклад 2. Для всіх $\Phi \in Fr$ та $\boldsymbol{J} \in \perp\boldsymbol{R_C}$ маємо $(\Phi \vee \neg\Phi \vee \tilde{}\Phi)_J = \mathrm{T}$ та $\tilde{}(\Phi \vee \neg\Phi \vee \tilde{}\Phi)_J = \perp$.

Приклад 3. Для всіх $\Phi \in Fr$ маємо ${}^{\alpha}\!\models_{id} \Phi \vee \neg\Phi \vee \tilde{}\Phi$ ($\boldsymbol{\alpha}$ – $\perp\boldsymbol{R_C}$ чи $\perp\boldsymbol{P_C}$).

Формули, які завжди інтерпретуються як константні предикати, назвемо константними. Зокрема, виділяємо T-формули, F-формули, $\perp$-формули. Наприклад, $R^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,\perp}(Ez)$ – F-формула.

На $\perp$ЧКНЛ поширимо поняття Un-еквівалентних формул.

Нехай $R^{\overline{x},\overline{v},\overline{u},\overline{w},\overline{z}}_{\overline{x},\overline{y},\overline{r},\perp,\perp}(\Phi)$ – R-формула така, що $\{\overline{u},\overline{w}\} \subseteq \nu(\Phi)$. R-формулу $R^{\overline{v},\overline{z}}_{\overline{y},\perp}(\Phi)$, утворену із

$R^{\overline{x},\overline{v},\overline{u},\overline{w},\overline{z}}_{\overline{x},\overline{y},\overline{r},\perp,\perp}(\Phi)$ спрощенням зовнішньої реномінації на основі властивостей R, R⊥I, R⊥U, назвемо *Rs-формою R*-формули $R^{\overline{x},\overline{v},\overline{u},\overline{w},\overline{z}}_{\overline{x},\overline{y},\overline{r},\perp,\perp}(\Phi)$. *Rs*-форми *R*-формул назвемо *Rs-формулами*.

Якщо Ξ – *Rs*-форма *R*-формули Ψ, то для всіх інтерпретацій ***J*** маємо $\Xi_J = \Psi_J$.

Для ⊥ЧКНЛ введемо поняття *Un*-еквівалентних формул, тобто формул, еквівалентних з точністю до *неозначених* предметних імен. Для ЧКНЛ подібне поняття розглянуте в [4.

Нехай $Un \subseteq V$ – деяка множина імен (змінних), які будемо трактувати як неозначені.

Формули Ψ та Ξ – *Un*-еквівалентні, якщо $\Psi_J(d) = \Xi_J(d)$ для всіх $\boldsymbol{J} = (A, I)$ та $d \in {}^V\!A \,\|_{-Un}$.

Те, що Ψ та Ξ є *Un*-еквівалентними, записуємо $\Psi \sim_{Un} \Xi$.

Нехай *Rs*-формула $R^{\overline{r},\overline{x},\overline{z},\overline{u},\overline{w}}_{\overline{s},\overline{y},\overline{v},\perp,\perp}\Phi$ така: $\{\overline{r},\overline{s},\overline{y},\overline{u}\} \subseteq Un$, $\{\overline{x},\overline{v},\overline{w}\} \cap Un = \varnothing$.

Un-форма формули $R^{\overline{r},\overline{x},\overline{z},\overline{u},\overline{w}}_{\overline{s},\overline{y},\overline{v},\perp,\perp}\Phi$ – це формула $R^{\overline{x},\overline{z},\overline{w}}_{\perp,\overline{v},\perp}\Phi$. *Un*-форми *Rs*-формул назвемо *Un-формулами*. *Un*-формули мають вигляд $R^{\overline{x},\overline{z}}_{\perp,\overline{v}}\Phi$, де $\{\overline{x},\overline{v}\} \cap Un = \varnothing$.

Поняття *Un*-форми природним чином поширюється на заперечення *Rs*-формул.

Твердження 11. Якщо Ψ – *Un*-форма формули Φ, то $\Phi \sim_{Un} \Psi$.

Наслідок. Якщо *Rs*-формули Ψ та Ξ мають однакові *Un*-форми, то $\Psi \sim_{Un} \Xi$.

4. Відношення логічного наслідку в ⊥ЧКНЛ

На множинах формул мов $L_\perp^{Q}$ та $L_\perp^{QC}$ визначимо низку відношень логічного наслідку.

Спочатку задамо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації ***J***:

– істиннісний, або *T*-наслідок $_J|\!=_T$: $\Phi\ {}_J|\!=_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$;

– хибнісний, або *F*-наслідок $_J|\!=_F$: $\Phi\ {}_J|\!=_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$;

– сильний, або *TF*-наслідок $_J|\!=_{TF}$: $\Phi\ {}_J|\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J|\!=_T \Psi$ та $\Phi\ {}_J|\!=_F \Psi$;

– неспростовнісний, або *IR*-наслідок $_J|\!=_{IR}$: $\Phi\ {}_J|\!=_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing$.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці **α** задаємо за схемою:

$$\Phi\ {}^{\alpha}|\!=_\tau \Psi, \text{ якщо } \Phi\ {}_J|\!=_\tau \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}.$$

Відношення логічного наслідку поширимо на пари множин формул.

Нехай деяка $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq Fr$, нехай ***J*** – інтерпретація. Далі позначаємо:

$\bigcap_{\theta \in \Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta \in \Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta \in \Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cap}(\Sigma_J)$,

$\bigcup_{\theta \in \Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta \in \Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta \in \Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cup}(\Sigma_J)$.

Δ є *IR*-наслідком Γ при інтерпретації ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_{IR} \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є *T*-наслідком Γ при інтерпретації ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_T \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Δ є *F*-наслідком Γ при інтерпретації ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta$), якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Δ є *TF*-наслідком Γ при інтерпретації ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J|\!=_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta$.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці **α** задаємо за схемою:

$$\Gamma\ {}^{\alpha}|\!=_\tau \Delta, \text{ якщо } \Gamma\ {}_J|\!=_\tau \Delta \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}.$$

Розглянемо відношення логічного наслідку в ⊥L. Далі **α** – це ***⊥R***, ***⊥P***, ***⊥Rc***, ***⊥Pc***.

В кожній з ***⊥R***, ***⊥P***, ***⊥Rc***, ***⊥Pc*** можна задати по 4 відношення, що дає 16 відношень логічного наслідку. Проте деякі з цих відношень порожні, а деякі – вироджені.

У випадку ***⊥R*** та ***⊥P***, як і у випадку вже традиційних семантик ***R*** та ***P*** зі звичайними реномінаціями, маємо ${}^{R}|\!=_{IR} = \varnothing$ та ${}^{R}|\!=_T = {}^{R}|\!=_F = {}^{R}|\!=_{TF}$, що теж дає 5 різних відношень:

$${}^{P}|\!=_{IR},\ {}^{P}|\!=_T,\ {}^{P}|\!=_F,\ {}^{P}|\!=_{TF},\ {}^{R}|\!=_{TF}.$$

Співвідношення між цими відношеннями такі ж, як між відповідними відношеннями в традиційних семантик ***R*** та ***P*** (див. [3]). Графічно це можна подати так:

$${}^{P}|\!=_T$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & {}^{P}|\!=_{TF} \arrow[dr] & \\
{}^{R}|\!=_{TF} \arrow[urr] \arrow[drr] & & & {}^{P}|\!=_{IR} \\
 & & {}^{P}|\!=_{F} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

У випадку $\perp$***Rc*** та $\perp$***Pc*** ситуація дещо інша. Детально властивості відношень логічного наслідку ${}^{Pc}|\!=_{IR}$, ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{IR}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$ в семантиках ***Rc*** та ***Pc*** зі звичайними реномінаціями описані в [9]. В семантиках $\perp$***Rc*** та $\perp$***Pc*** властивості цих відношень аналогічні.

Маємо $\vartheta\ {}^{Rc}|\!\neq_{IR}\ \vartheta$ для кожного $\vartheta \in P_S$, тому ${}^{Rc}|\!=_{IR} \neq \varnothing$, проте ${}^{Rc}|\!=_{IR}$ дуже вироджене.

Маємо $\Gamma\ {}^{Rc}|\!=_{F}\ {}^{\sim}\Phi$ та $\neg{}^{\sim}\Phi\ {}^{Rc}|\!=_{T} \Delta$, водночас $\Phi\ {}^{Rc}|\!\neq_{T}\ {}^{\sim}\Phi$ та $\neg{}^{\sim}\Phi\ {}^{Rc}|\!\neq_{F} \Phi$. Тому відношення ${}^{Rc}|\!=_{T}$ та ${}^{Rc}|\!=_{F}$ вже стають різними.

Отже, в $\perp$***Rc*** та $\perp$***Pc***, як і в ***Rc*** та ***Pc***, маємо 8 різних відношень логічного наслідку, із них одне відношення ${}^{Rc}|\!=_{IR}$ вироджене:

${}^{Pc}|\!=_{IR}$, ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$; ${}^{Rc}|\!=_{IR}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$.

Графічно співвідношення між ними можна подати так:

$$
\begin{tikzcd}
 & {}^{Rc}|\!=_{T} \arrow[r] & {}^{Pc}|\!=_{T} \arrow[dr] & & \\
{}^{Rc}|\!=_{TF} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & {}^{Pc}|\!=_{TF} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {}^{Pc}|\!=_{IR} & {}^{Rc}|\!=_{IR} \arrow[l] \\
 & {}^{Rc}|\!=_{F} \arrow[r] & {}^{Pc}|\!=_{F} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Відношення логічного наслідку задають відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності при інтерпретації ***J*** визначаємо за такою схемою:

$\Phi\ {}_{J}\!\sim_{*} \Psi$, якщо $\Phi\ {}_{J}|\!=_{*} \Psi$ та $\Psi\ {}_{J}|\!=_{*} \Phi$.

Відповідні відношення логічної еквівалентності визначаємо за такою схемою:

$\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_{*} \Psi$, якщо $\Phi\ {}^{\alpha}|\!=_{*} \Psi$ та $\Psi\ {}^{\alpha}|\!=_{*} \Phi$.

Особливе значення має відношення ${}_{J}\sim_{TF}$, адже $\Phi\ {}_{J}\!\sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ_J та Ψ_J – це один і той же предикат. Справді, $\Phi\ {}_{J}\!\sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Теорема еквівалентності та теорема заміни еквівалентних в $\perp$***Rc*** та $\perp$***Pc*** формулюються традиційним чином (тут ${}^{*}\!\sim_{TF}$ – це ${}^{Rc}\!\sim_{TF}$ чи ${}^{Pc}\!\sim_{TF}$).

Теорема 4. Нехай Φ' отримана з Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$.

Якщо $\Phi_1\ {}^{*}\!\sim_{TF} \Psi_1, ..., \Phi_n\ {}^{*}\!\sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi\ {}^{*}\!\sim_{TF} \Phi'$.

Теорема 5. Нехай $\Phi\ {}^{*}\!\sim_{TF} \Psi$, тоді $\Phi, \Gamma |\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |\!=_{*} \Delta$ та $\Gamma |\!=_{*} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{*} \Delta, \Psi$.

Властивості відношень логічного наслідку в $\perp$***Rc*** та $\perp$***Pc*** аналогічні властивостям відповідних відношень в ***Rc*** та ***Pc*** (див. [9]). Для всіх цих відношень маємо такі властивості.

M) $\Gamma \subseteq \Lambda, \Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow (\Gamma |\!=_{*} \Delta \Rightarrow \Lambda |\!=_{*} \Sigma)$ – монотонність.

Властивості декомпозиції формул (окрім ${}^{\sim}\Phi$):

$\neg\neg_{L}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma |\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!=_{*} \Delta$;

$\neg\neg_{R}$) $\Gamma |\!=_{*} \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{*} \Delta, \Phi$;

$\vee_{L}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma |\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!=_{*} \Delta$ та $\Psi, \Gamma |\!=_{*} \Delta$;

$\vee_{R}$) $\Gamma |\!=_{*} \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{*} \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_{L}$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma |\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma |\!=_{*} \Delta$;

$\neg\vee_{R}$) $\Gamma |\!=_{*} \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{*} \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma |\!=_{*} \Delta, \neg\Psi$;

Для ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ додатково маємо:

$\neg_{L}$) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_{IR} \Delta, \Phi$;

$\neg_{\mathrm{R}})\ \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_{IR}\Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_{IR}\Delta.$

Декомпозиція формул $\sim\Phi$ має особливості.

Теорема 6. Для ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ неможливо коректно задати умови декомпозиції формул $\sim\Phi$.

Це зумовлює необхідність переходу від ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ до загальнішого відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$ неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності, що зроблено в [7, 9]. В цьому плані відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ в ***Pc*** та $\perp$***Pc*** теж некоректне, його далі розглядати не будемо.

Властивості декомпозиції формул $\sim\Phi$ для ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$ такі ж, як в ***Rc*** та ***Pc***:

$\sim_{\mathrm{LT}})\ \sim\Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{T}\Delta, \Phi, \neg\Phi;$

$\sim_{\mathrm{RT}})\ \Gamma |\!=_{T}\Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta;$

$\neg\sim_{\mathrm{RF}})\ \Gamma |\!=_{F}\Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma, \Phi, \neg\Phi |\!=_{F}\Delta;$

$\neg\sim_{\mathrm{LF}})\ \neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_{F}\Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{F}\Delta, \Phi$ та $\Gamma |\!=_{F}\Delta, \neg\Phi;$

$\neg\sim_{\mathrm{El}})\ \Gamma |\!=_{T}\Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{T}\Delta;$

$\sim_{\mathrm{El}})\ \sim\Phi, \Gamma |\!=_{F}\Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{F}\Delta.$

Для відношень типу $|\!=_{T}$ та типу $|\!=_{F}$ маємо різні властивості декомпозиції формул $\sim\Phi$, які не можна подати як спільну властивість для відношень типу $|\!=_{TF}$, що зумовлено асиметричною поведінкою композиції $\sim$ щодо областей істинності й хибності. Тому властивості декомпозиції формул $\sim\Phi$ для відношень ${}^{Pc}|\!=_{TF}$ та ${}^{Rc}|\!=_{TF}$ отримуємо, поєднуючи відповідні властивості відношень типу $|\!=_{T}$ та типу $|\!=_{F}$:

$\sim\Phi, \Gamma |\!=_{TF}\Delta \Leftrightarrow \sim\Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta$ та $\sim\Phi, \Gamma |\!=_{F}\Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{T}\Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Gamma |\!=_{F}\Delta.$

$\Gamma |\!=_{TF}\Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{T}\Delta, \neg\sim\Phi$ та $\Gamma |\!=_{F}\Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{T}\Delta$ та $\Gamma, \Phi, \neg\Phi |\!=_{F}\Delta.$

$\Gamma |\!=_{TF}\Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{T}\Delta, \sim\Phi$ та $\Gamma |\!=_{F}\Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta.$

$\neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_{TF}\Delta \Leftrightarrow \neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_{T}\Delta$ та $\neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_{F}\Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{F}\Delta, \Phi$ та $\Gamma |\!=_{F}\Delta, \neg\Phi.$

Властивості еквівалентних перетворень індуковані властивостями предикатів R, R⊥I, R⊥U, R⊥¬, R⊥∨, R⊥R, R⊥∃, R⊥∃s із теореми 1 та властивістю $\mathrm{R}_{\perp}\sim$. Кожна з них задає 4 властивості для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення – в лівій чи правій частині відношення. При кожній інтерпретації предикати, що є значеннями виділених формул, збігаються. Наведемо для прикладу властивості, індуковані $\mathrm{R}_{\perp}\sim$.

$\mathrm{R}_{\perp}\sim_{\mathrm{L}})\ R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\sim\Phi), \Gamma |\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \sim R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma |\!=_{*}\Delta;$

$\mathrm{R}_{\perp}\sim_{\mathrm{R}})\ \Gamma |\!=_{*}\Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\sim\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{*}\Delta, \sim R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi);$

$\neg\mathrm{R}_{\perp}\sim_{\mathrm{L}})\ \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\sim\Phi), \Gamma |\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \neg\sim R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma |\!=_{*}\Delta;$

$\neg\mathrm{R}_{\perp}\sim_{\mathrm{R}})\ \Gamma |\!=_{*}\Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\sim\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |\!=_{*}\Delta, \neg\sim R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi).$

Властивості еквівалентних перетворень для відношень типу $|\!=_{TF}$ теж вірні, проте їх задаємо опосередковано, через відповідні властивості для відношень типу $|\!=_{T}$ та типу $|\!=_{F}$.

Для відношень типів $|\!=_{T}$ та $|\!=_{F}$ маємо властивості, пов'язані з елімінацією кванторів.

$\exists_{\mathrm{L}})\ \exists x\Phi, \Gamma |\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi), Ez, \Gamma |\!=_{*}\Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists\mathrm{R}\perp_{\mathrm{L}})\ R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi), \Gamma |\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi), Ez, \Gamma |\!=_{*}\Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$.

$\neg\exists_{\mathrm{R}})\ \Gamma |\!=_{*}\neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez |\!=_{*}\neg R^{x}_{z}(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\neg\exists\mathrm{R}\perp_{\mathrm{R}})\ \Gamma |\!=_{*}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi), \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez |\!=_{*}\neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$.

$\exists\mathrm{v}_{\mathrm{R}})\ \Gamma, Ey |\!=_{*}\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ey |\!=_{*}\exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \Delta.$

$\exists\mathrm{R}\perp\mathrm{v}_{\mathrm{R}})\ \Gamma, Ey |\!=_{*}\Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma, Ey |\!=_{*}\Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi).$

$\neg\exists\mathrm{v}_{\mathrm{L}})\ \neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma |\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{y}(\Phi), Ey, \Gamma |\!=_{*}\Delta.$

$\neg\exists\mathrm{R}\perp\mathrm{v}_{\mathrm{L}})\ \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi), Ey, \Gamma |\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi), \neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), Ey, \Gamma |\!=_{*}\Delta.$

Властивості E-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, Ey$ та $Ey, \Gamma \models_* \Delta$.

Ev) $\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models_* \Delta$, де $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Розглянемо властивості, пов'язані з предикатами-індикаторами.

При перенесенні формули $\neg\Phi$, яка завжди інтерпретується як $Q \in TS$, з лівої частини відношення у праву і навпаки, можна знімати $\neg$. Звідси властивості:

$\neg$E) $\neg Ey, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, Ey$; $\Gamma \models_* \Delta, \neg Ey \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$R$\perp$E) $\neg R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{w},\perp}(Ez), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{w},\perp}(Ez)$; $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{w},\perp}(Ez) \Leftrightarrow R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{w},\perp}(Ez), \Gamma \models_* \Delta$;

Властивості спрощення при реномінації Ez:

R$\perp$E) $R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Ez), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models_* \Delta, R^{\overline{v},\overline{u}}_{\overline{x},\perp}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, Ez$ (тут $z \notin \{\overline{v}, \overline{u}\}$);

R$\perp$Ev) $R^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,y}(Ez), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models_* \Delta, R^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,y}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, Ey$;

El$_{\mathrm{RE}}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,\perp}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta$ – елімінація $_{\mathrm{F}}$-формули:

Наведемо властивості, які *гарантують* наявність відношення логічного наслідку:

C) $\Phi, \Gamma \models_* \Delta, \Phi$;

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$;

CR) $\Gamma \models_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

CF) $R^{\overline{v},\overline{u},z}_{\overline{x},\perp,\perp}(Ez), \Gamma \models_* \Delta$.

$C\sim$) $\Gamma \models_F \sim\Phi, \Delta$;

$C\neg\sim$) $\neg\sim\Phi, \Gamma \models_T \Delta$.

Теорема 7. Маємо властивості гарантованої наявності відношення логічного наслідку:

– C, CL, CF, $C\neg\sim$ для $^{Pc}\!\models_T$;

– C, CR, CF, $C\sim$ для $^{Pc}\!\models_F$;

– C, CF, $C\neg\sim$ для $^{Pc}\!\models_T$;

– C, CF, $C\sim$ для $^{Pc}\!\models_F$.

5. Відношення логічного наслідку в $\perp$ЧКНЛ за умов невизначеності

Некоректність відношень типу $\models_{IR}$ в $\perp$LC мотивує перехід до загальніших відношень логічного наслідку за умов невизначеності. Спочатку задамо відношення наслідку за умов невизначеності при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$. Нехай $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$.

Δ є IR-наслідком Γ за умов невизначеності U при $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\,{}_J\!\models_{IR}{}^{\perp}\Delta$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є T-наслідком Γ за умов невизначеності U при $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\,{}_J\!\models_T{}^{\perp}\Delta$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ за умов невизначеності U при $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\,{}_J\!\models_F{}^{\perp}\Delta$, якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Відношення *логічного наслідку за умов невизначеності* в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ визначаємо за традиційною схемою: $\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{\alpha}\!\models\tau\,\Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\,{}_J\!\models\tau\,\Delta$ для всіх $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Отримуємо відношення $\models_{IR}{}^{\perp}$, $^{P}\!\models_T{}^{\perp}$, $^{P}\!\models_F{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_T{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_F{}^{\perp}$.

Відношення $^{P}\!\models_{TF}{}^{\perp}$ та $^{R}\!\models_{TF}{}^{\perp}$ будемо трактувати як похідні від $^{P}\!\models_T{}^{\perp}$, $^{P}\!\models_F{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_T{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_F{}^{\perp}$.

Як і в семантиках $\boldsymbol{Pc}$ та $\boldsymbol{Rc}$ (див. [9]), співвідношення між $\models_{IR}{}^{\perp}$, $^{P}\!\models_T{}^{\perp}$, $^{P}\!\models_F{}^{\perp}$, $^{P}\!\models_{TF}{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_T{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_F{}^{\perp}$, $^{R}\!\models_{TF}{}^{\perp}$ ідентичні співвідношенням між $^{Pc}\!\models_{IR}$, $^{Pc}\!\models_T$, $^{Pc}\!\models_F$, $^{Pc}\!\models_{TF}$, $^{Rc}\!\models_T$, $^{Rc}\!\models_F$, $^{Rc}\!\models_{TF}$:

У випадках $\perp\boldsymbol{Pc}$ та $\perp\boldsymbol{Rc}$ для відношень типів $\models_T$ та $\models_F$ справджується теорема про елімінацію умов невизначеності [9].

Теорема 8. $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}\!\models_T{}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,{}^{P}\!\models_T{}^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$; $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}\!\models_T{}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,{}^{R}\!\models_T{}^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$;
$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}\!\models_F{}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,{}^{P}\!\models_F{}^{\perp}\Delta$; $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}\!\models_F{}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,{}^{R}\!\models_F{}^{\perp}\Delta$.

Це означає, що відношення ${}^{P}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}^{\perp}$ та ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$ можна промоделювати за допомогою ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, усунувши умови невизначеності.

Водночас для $|\!=_{IR}^{\perp}$ *неможливо* усунути умови невизначеності і тим самим промоделювати $|\!=_{IR}^{\perp}$ за допомогою ${}^{Pc}|\!=_{IR}$. Тому відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ не можна звести до відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$.

Таким чином, із введених відношень логічного наслідку за умов невизначеності детально розглядати доцільно лише відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$.

Властивості відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ в семантиці ***Pc*** детально описані в [7, 9], ці властивості будуть вірними і для відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ в семантиці $\perp$***Pc***.

Явне виділення $\perp$-областей в $|\!=_{IR}^{\perp}$ дає змогу робити відповідну декомпозицію формул:

$\neg_{\mathrm{U}})\ \mathrm{U}, \neg\vartheta / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \vartheta / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta;$

$\vee_{\mathrm{U}})\ \mathrm{U}, \Phi\vee\vartheta / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \Phi, \vartheta / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U}, \Phi / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \vartheta, \Delta$ та $\mathrm{U}, \vartheta / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Phi, \Delta;$

${}^{\sim}{}_{\mathrm{U}})\ \mathrm{U}, {}^{\sim}\Phi / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \Phi, \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U} / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi;$

${}^{\sim}{}_{\mathrm{L}})\ \mathrm{U} / {}^{\sim}\Phi, \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \Phi / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta.$

Властивості еквівалентних перетворень та елімінації кванторів для $|\!=_{IR}^{\perp}$ в семантиці $\perp$***Pc*** такі ж, як в семантиці ***Pc*** (див. [8, 9]).

В семантиці $\perp$***Pc*** умови гарантованої наявності $|\!=_{IR}^{\perp}$ порівнянно з ***Pc*** роширюються пов'язаними з предикатами-індикаторами умовами $C^{U}F$ та C_{RE}^{U} . Тому отримуємо такі умови:

$C_{LR})\ \mathrm{U} / \Phi, \Gamma^{\#} |\!=_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi;$

$C_{UL})\ \mathrm{U}, \Phi / \Phi, \Gamma^{\#} |\!=_{IR}^{\perp} \Delta;$

$C_{UR})\ \mathrm{U}, \Phi / \Gamma^{\#} |\!=_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi;$

$C^{U}{}^{\sim})\ \mathrm{U} / \Gamma^{\#} |\!=_{IR}^{\perp} \Delta, {}^{\sim}\Phi$;

$C^{U}F)\ \mathrm{U} / R_{\overline{x},\perp,\perp}^{\overline{v},\overline{u},z}(Ez), \Gamma^{\#} |\!=_{IR}^{\perp} \Delta;$

$C_{RE}^{U})\ \mathrm{U}, R_{\overline{w},\perp}^{\overline{v},\overline{u}}(Ey) / \Gamma =_{IR}^{\perp} \Delta;$ зокрема, $\mathrm{U}, Ey / \Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta.$

Висновки

Досліджено нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки з композицією предикатного доповнення. Особливістю пропонованих логік є використання розширених реномінацій та предикатів-індикаторів наявності значення для змінних. Описано композиційні алгебри і мови таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Для цих логік запропоновано і досліджено низку відношень логічного наслідку, зокрема, відношень логічного наслідку за умов невизначеності. Властивості цих відношень – семантична основа подальшої побудови для цих логік числень секвенційного типу.

На цій семантичній основі в наступних статтях планується побудова для пропонованих логік низки числень секвенційного типу.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993–2000.

2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.

3. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.

4. Hoare C. An axiomatic basis for computer programming, Comm. 1969. ACM. 12(10). P. 576–580.

5. Apt, K. (1981) Ten years of Hoare's logic: a survey – part I. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, 3(4), 431–483.

6. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement, Comm. in Computer and Information Science. 2019. Vol 1007. Springer, Cham. P. 71–88.

7. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С., Мамедов Т.А. Пропозиційні логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування.* 2019. № 1, С. 3–13.

8. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak. Program Logics of Renominative Level with the Composition of Predicate Complement, *in* Proceedings of the 15th International Conference on ICT. CEUR Workshop, vol. 2393, pp. 603–616 (2019).

9. Шкільняк, О.С. Відношення логічного наслідку в логіках часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування*, 2019. № 3, С. 11–27.

10. S.C. Kleene. Mathematical Logic. New York, 1967.

Провотар Олександр Іванович, доктор фіз-мат.наук, професор,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

e-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua

АЛГОРИТМИ І ФОРМАЛЬНІ МОДЕЛІ ОБЧИСЛЕНЬ

О.І. Провотар

Анотація. Розглядаються різні формальні моделі обчислень. Показано, як обчислюються функції на основі таких моделей. Робиться висновок про те, що озглянуті формальні моделі обчислень можна моделювати в рамках тих чи інших категорій і будувати абстрактну теорію обчислюваності і відповідні мови програмування на категорній основі.

Abstract. Different formal models of calculation are considered. It is shown how functions are calculating on base of such models. It is concluded that the considered formal models of computation can be described within certain categories and build an abstract theory of computability and the corresponding programming languages on categorical bases.

Keywords: category, fuzzy set, λ-calculus, recursive function.

1. Вступ

Розглянемо простий приклад. Нехай маємо скінченну множину M натуральних чисел. Необхідно знайти мінімальний елемент цієї множини. Припустимо, що в нас є середовище, яке дозволяє описувати довільні структури даних, зокрема множину M та поняття мінімального елемента. Крім цього, в цьому середовищі є засоби описання і виконання алгоритмів над структурами даних. Тоді в такому середовищі може бути знайдений мінімальний елемент множини M як елемент відповідної структури даних.

Наприклад, множину M можна описати відношенням предпорядку $\subseteq$. За відношенням предпорядку побудувати категорію предпорядку $(M, \subseteq)$. Мінімальний елемент множини M в цьому випадку можна знайти, як початковий об'єкт категорії.

2. Рекурсивні функції

Показати алгоритмічну обчислюваність функцій шляхом її належності до класу частково рекурсивних функцій досить складно, окрім найпростіших функцій. Крім того, в кожному конкретному випадку це потребує побудови математичної моделі функції у вигляді терма із обчислюваних операцій над базовими функціями. Базовими функціями, як відомо [1], називаються найпростіші функції

$o(x) = 0$, $s(x) = x+ 1$ та функції-селектори $(x_1, \dots , x_n) = x_m$, де $n \geq m \geq 1$.

Основними обчислюваними операціями будуть оператори *суперпозиції* $\boldsymbol{S}^{n+1}$, *примітивної рекурсії* ***R*** та *мінімізації* ***M***.

Таким чином, функція алгоритмічно обчислювана, якщо існує операторний терм, який її задає.

Виникає цілком закономірне питання про можливість використання конкретних алгоритмів для доведення фундаментальних результатів теорії рекурсивних функцій. Для цього потрібно точно описати основні конструкції алгоритму і переформулювати (конкретизувати) тезу Чорча для більш вузьких класів алгоритмічно обчислюваних функцій.

Домовимося далі записувати алгоритми в мові ПсевдоPascal, яка є спрощеним діалектом мови Pascal. Операторами цієї мови будуть наступні:

<ідентифікатор> = <вираз>,
if <вираз> then <оператор> | {<оператор>, … , <оператор>}
else <оператор> | {<оператор>, … , <оператор>},
while <вираз> do <оператор>| {<оператор>, … , <оператор>},
for <вираз> to <вираз> <оператор>| {<оператор>, … , <оператор>}.

Конкретизуємо тезу Чорча для класів ПРФ, РФ та ЧРФ відповідно.

1. Клас функцій, що обчислюються всюди визначеними алгоритмами без використання оператора while … do. Цей клас описується наступним чином:

1) Вважатимемо, що найпростіші функції обчислюються всюди визначеними алгоритмами без використання оператора while … do, а, отже належать до цього класу.

2) Всі функції, які обчислюються всюди визначеними алгоритмами без використання оператора while … do і при їх обчисленні використовуються функції, які обчислюються всюди визначеними алгоритмами без використання оператора while … do теж відносимо до цього класу.

Таким чином, справедлива наступна

Теза 1. Клас функцій, що обчислюються всюди визначеними алгоритмами без використання оператора while … doспівпадає з класом примітивно рекурсивних функцій.

2. Клас функцій, що обчислюються всюди визначеними алгоритмами. Цей клас описується наступним чином:

1) Всі ПРФ належать до цього класу.

2) Всі функції, які обчислюються всюди визначеними алгоритмами і при їх обчисленні використовуються функції, які обчислюються всюди визначеними алгоритмами теж відносимо до цього класу.

Таким чином, справедлива наступна

Теза 2. Клас функцій, що обчислюються всюди визначеними алгоритмами співпадає з класом рекурсивних функцій.

3. Клас функцій, що обчислюються довільними алгоритмами. Цей клас описується наступним чином:

1) Всі РФ належать до цього класу.

2) Всі функції, які обчислюються довільними алгоритмами і при їх обчисленні використовуються функції, які обчислюються довільними алгоритмами теж відносимо до цього класу.

Таким чином, справедлива наступна

Теза 3. Клас функцій, що обчислюються довільними алгоритмами співпадає з класом частково рекурсивних функцій.

Приклад. Покажемо, що якщо графік G_f всюди визначеної функції $f(x_1, \dots, x_n)$ є рекурсивно перелічимою множиною, то функція fрекурсивна.

Дійсно, графік G_f – це сукупність $(n+1)$-ок виду:

$$<f_1(t), \dots, f_n(t), g(t)>,$$

де f_i, g – ПРФ. Тоді значення функції f в довільній точці можна обчислити за допомогою наступного алгоритму:

```
function f(x1, … , xn)
    begin
        i = 0
        while f1(i) ≠ x1∨ … ∨ fn(i) ≠ xn
                do i = i +1
        f = g(i)
    end,
```

отже, функція f – рекурсивна.

Таким чином, з одного боку ми маємо алгебраїчний терм, як формальну модель обчислень (алгоритм), з іншого – синтаксичну конструкцію на мові ПсевдоPascal, яка теж є формальною моделлю обчислень (алгоритмом), але дуже наближеною до мов програмування. Тобто, якщо обмежитись, наприклад, множиною натуральних чисел і ввести найпростіші логічні та арифметичні операції, обчислювальні в рамках класичної обчислювальної парадигми, то можна говорити про побудову теорії обчислювальності в рамках того чи іншого формалізму. Зазначимо також, що згадані вище формальні моделі задають частково рекурсивні функції або, на підставі тези Чорча, алгоритмічно обчислювальні функції.

3. λ-числення

Ряд спільних рис з мовами програмування та їх реалізацією має λ-числення [2]. Основним об'єктом вивчення λ-числення є множина λ-термів. Ця множина визначається наступним чином.

Символи λ-числення.

1. Малі латинські букви з індексами або без них:

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$$

2. Сисвол абстрактора – λ.
3. Пара символів, які називаються дужками.

Визначання λ-терма.

1. Кожна змінна є λ-термом.
2. Якщо M і N – λ-терми, то (MN) – λ-терм.
3. Якщо M – λ-терм і x – змінна, то $(\lambda x.M)$ – λ-терм.

Як легко бачити, наступні вирази будуть λ-термами: xx, $\lambda x.xx$, $\lambda xy.yx$. Останній з них – це скорочений запис λ-терма $\lambda x.(\lambda y.(yx))$. Тобто, дужки або символ λ, які повторюються в λ-термах, як правило не пишуться.

Правила виведення

Нас цікавить обчислювальний аспект λ-числення, який вводиться через поняття λ-визначуваності та поняття α-конверсії та β-редукції. Зокрема:

1. α-конверсія. Якщо $y \notin FV(N)$, то $\lambda x.M \equiv \lambda.y[y/x]M$, де $FV(N)$ – множина всих вільних змінних терма N; $[y/x]M$ – оператор підстановки змінної узамість змінної xв терм M (в загальному випадку $[N/x]M$ – оператор підстановки виразу N замість змінної x в вираз M); символ $\equiv$ означає повне співпадіння синтаксичних об'єктів.
2. β-редукція. Терм виду $(\lambda x.M)N$ називають β-редексом. Якщо β-редекс терма P замінюється термом $[N/x]M$, то говорять, що відбуваєтья звертання цього входження. Скінченну або нескінченну послідовність звертань і замін зв'язаних змінних називають β-редукцією. Якщо така послідовність скінченна і переводить P в Q, то говорять, що терм P β-редукується в терм Q і пишуть $P \rhd_\beta Q$.

Приклад(β-редукцій).

1. $(\lambda x.((\lambda y.xy)u)\ (\lambda v.v) \rhd_\beta (\lambda y.(\lambda v.v)y)u \rhd_\beta (\lambda v.v)u \rhd_\beta u$;
2. $(\lambda x.xx)\ (\lambda x.xx) \rhd_\beta\ (\lambda x.xx)\ (\lambda x.xx) \rhd_\beta \ldots$.

В другому прикладі редукція нескінченна, хоч терм при цьому не змінюється.

Для визначення поняття λ-визначуваності функцій, деяка послідовність $0'$, $1'$, ..., n'термів, які не містять β-редексів, ототожнюється з натуральними числами. Зокрема, досить відомою є нумерація Чорча, коли

$$0' \equiv \lambda xy.y,\ 1' \equiv \lambda xy.xy,\ \ldots,\ n' \equiv \lambda xy.x^n y.$$

Далі говорять, що функція f: $N^k \to N$є λ-визначуваною, якщо існує терм F такий, що для всих $n_1, \ldots, n_k \in N$ має місце редукція

$$Fn_1' \ldots n_k' \rhd_\beta f(n_1, \ldots, n_k)'.$$

Так, наприклад, можна показати, що функція слідування є λ-визначуваною. Дійсно, вона λ-визначається термом $\lambda uxy.x(uxy)$. Це можна легко довести методом математичної індукції. Редукція для кроку $n = 0'$ виглядає як

$$\lambda uxy.x(uxy)\ \lambda xy.y \equiv (\lambda u(\lambda x(\lambda y.\ x(uxy)\ \lambda xy.y \rhd_\beta$$
$$\lambda x(\lambda y.\ x((\lambda xy.y)xy)) \equiv \lambda x(\lambda y.\ x(((\lambda xy.y)x)y)) \equiv$$
$$\lambda x(\lambda y.\ x(((\lambda x(\lambda y.y))xy)) \rhd_\beta \lambda x(\lambda y.xy) \equiv \lambda xy.xy.$$

Таким чином,

$$F0' \equiv \lambda uxy.x(uxy)\ \lambda xy.y \rhd_\beta 1'.$$

Аналогічно визначаються інші арифметичні функції і будуються відповідні доведення. Зазначимо, що для λ-визначуаних функцій має місце твердження, відоме як

Теорема (Кліні). Нехай $f{:}N^k \to N$. Тоді f – λ-визначувана тоді і тільки тоді, коли f – рекурсивна.

Як бачимо, для λ-числення визначена множина натуральних чисел і множина рукурсивних функцій, а отже елементарних арифметичних операцій таких, як, наприклад, додавання і множення. Алгоритми обчислення довільних рекурсивних функцій на основі λ-числення можна описати синтаксичними конструкціями, аналогічними приведеному нижче алгоритму обчислення функція слідування.

```
function s(n)
    begin
      m' =  λuxy.x(uxy)n'
      s= m
    end,
```

де m' – λ-терм, в який редукується терм $\lambda uxy.x(uxy)n'$.

4. Нечіткі моделі

В бінарній логіці, як відомо, істинність твердження (висловлювання) виводиться на підставі істинності складових тверджень (висловлювань). Подібне виведення задається у вигляді схеми: над горизонтальною рискою записуються всі складові твердження, а під – саме твердження.

Наприклад, правило *modus ponens* визначається наступною схемою:

Умова Імплікація	A $A \to B$
Висновок	B

В нечіткій логіці [3] використовується узагальнене (нечітке) правило виведення *modus ponens* визначається наступною схемою виведення:

Умова Імплікація	x це A' якщо x це A, то y це B
Висновок	y це B'

де A, $A' \subseteq \boldsymbol{X}$ і B, $B' \subseteq \boldsymbol{X}$ – нечіткі множини, x, y – так звані *лінгвістичні змінні*, значеннями яких є нечіткі висловлювання на природній мові. Висновок нечіткого правила відноситься до деякої нечіткої множини B', яка визначається композицією нечіткої множини A' і нечіткої імплікації $A \to B$, тобто

$$B' = A' \circ (A \to B).$$

Нечітка імплікація $A \to B$ рівнозначна деякому нечіткому відношенню $R \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ з функцією належності $\mu_R(x,y)$. Тому функцію належності нечіткої множини B' можна подати у вигляді

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{\mu_{A'}(x) \overset{T}{*} \mu_{A \to B}(x, y)\}$$

причому $\mu_{A \to B}(x,y) = \mu_R(x,y)$. Зокрема, якщо T-норма має тип min, остання формула приймає вигляд

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{\min[\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)]\}$$

Для визначення нечіткої імплікації найчастіше використовується правило Мамдані, яке задається як

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Арифметика нечітких чисел

В теорії нечітких систем виділяються нечіткі множини, які визначаються на осі дійсних чисел і є нормальними, випуклими, а також мають неперервні функції належності. Такі нечіткі множини називається *нечіткими числами.*

Основні арифметичні операції – сума, різниця, множення і ділення двох нечітких чисел A_1, $A_2 \subseteq \boldsymbol{R}$ задаються за допомогою принципу розширення. Наприклад, сума двох нечітких чисел A_1 і A_2(позначається $A_1 \oplus A_2 = B$) обчислюється як

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1 x_2 \\ y = x_1 + x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}.$$

Натуральні числа в цьому випадку можуть ототожнюватись з нечіткими трикутними числами.

Алгоритм обчислення довільних функцій над множиою натуральних чисел може бути описаний наступною синтаксичною конструкцією:

function $s(x, y)$
  begin
    if x is (a_1, x, b_1) and y is (a_2, y, b_2) then
      s' is $(a_1+a_2, x+y, b_1+b_2)$
    $s = x+y$
  end,

де (a_1, x, b_1) та (a_2, y, b_2) – нечіткі трикутні числа, які моделюють натуральні числа x та y відповідно.

5. Категорії

Категорія $\mathcal{L}$ [4] складається із:

1. Сукупності об'єктів $Ob = \{a, b, c, ...\}$;
2. Сукупності морфізмів $Mor = \{f, g, h, ...\}$;
3. Всюди визначеного відображення F: $Mor \to Ob \times Ob$;
4. Часткового відображення K: $Mor \times Mor \to Mor$.

Це відображення визначене на парах f і g морфізмів таких, що $F(f) = (a,b)$, $F(g) = (b,c)$ і $F(K(f,g)) = (a,c)$, причому, якщо $F(f) = (a,b)$, $F(g) = (b,c)$, $F(h) = (c,d)$, то $K(K(f,g),h) = K(f,K(g,h))$ (закон асоціативності);

5. Для кожного об'єкта $b \in Ob$ існує морфізм 1_b ($F(1_b) = (b,b)$) такий, що для будь-яких морфізмів f, g таких, що $F(f) = (a,b)$, $F(g) = (b,c)$, $K(1_b, g) = g$, $K(f, 1_b) = f$.

Визначення істиносних значень *true* і *false*

Нехай $\mathfrak{I}$ – категорія з кінцевим об'єктом 1. Класифікатором підоб'єктів для $\mathfrak{I}$ називається $\mathfrak{I}$-об'єкт Ω разом з $\mathfrak{I}$-морфізмом $true$:$1 \to \Omega$ такий, що виконується наступна аксіома:

Ω-аксіома. Для будь-якого мономорфізму f:$a \to d$ існує один і тільки один (єдиний) $\mathfrak{I}$-морфізм χ_f: $d \to \Omega$, для якого діаграма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \arrow[dl, phantom, "true"] \\ 1 \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

є декартовим квадратом.

Декартово замкнута категорія з класифікатором підоб'єктів називається топосом.

В довільному топосі морфізм $false$:$1 \to \Omega$ визначається як єдиний морфізм, для якого квадрат

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_1"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "false"] \\ 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \end{tikzcd}$$

декартовий.

Логічні функції в топосі

Виходячи з того, що область значень будь-якої класичної логічної функції – це двохелементна множина **2** = {0,1}, таку функцію можна розглядати, як характеристичну функцію деякої підмножини її області визначення. Або, іншими словами, як характеристичну функцію образу деякого мономорфізму. Саме це дозволяє дати визначення логічних функцій за допомогою діаграм в довільному топосі.

Наприклад, функція кон'юнкції $\wedge:\Omega\times\Omega\to\Omega$ визначається декартовим квадратом

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\langle true, true\rangle"] \arrow[d] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \end{tikzcd}$$

тобто є характером добутку морфізмів $\langle true, true\rangle: 1\to\Omega$.

Інші логічні функції $\vee$, $\neg$ та $\Rightarrow$ визначаються аналогічно відповідними декартовими квадратами.

Справедлива

Теорема. Морфізми $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$ ведуть себе згідно наступних таблиць:

$\neg$		$\wedge$			$\Rightarrow$			$\vee$		
	true	*false*		*true*	*false*		*true*	*false*		*true*	*false*
false	*true*		*true*	*true*	*false*	*true*	*true*	*false*	*true*	*true*	*true*
			false	*false*	*false*	*false*	*true*	*true*	*false*	*true*	*false*

Натурально-числовий об'єкт

NNO. Натурально-числовий об'єкт – це об'єкт N разом з парою морфізмів $1\xrightarrow{O} N\xrightarrow{s} N$ таких, що для будь-якого обєкта a і морфізмів $1\xrightarrow{x} a\xrightarrow{f} a$ існує єдиний морфізм h: $N\to a$ для якого діаграма

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "O"] \arrow[r, "x"'] & a \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

комутує.

Таким чином, натуральне число – це морфізм n:$1\to N$ в топосах з натурально-числовим об'єктом.

В топосі з NNO можна визначати арифметичні операції. Зокрема, операція додавання визначається як єдиний морфізм, для якого діаграма

$$\begin{tikzcd}
 & N\times N \arrow[r, "1_N\times s"] \arrow[d, "\oplus"] & N\times N \arrow[d, "\oplus"] \\
N \arrow[ur, "\langle 1_N, O_N\rangle"] \arrow[r, "1_N"'] & N \arrow[r, "s"] & N
\end{tikzcd}$$

комутує.

Обчислення суми $m + 0$ натуральних чисел зводиться до обчислення композицій

$$m \circ \langle 1_N, O_N\rangle \circ \oplus = m \circ 1_N = m.$$

А, наприклад, обчислення $m + 1$ – до обчислення композицій

$$m \circ \langle 1_N, O_N \circ s\rangle \circ \oplus = m \circ \langle 1_N, O_N\rangle \circ 1_N \times s \circ \oplus = m \circ \langle 1_N, O_N\rangle \circ \oplus \circ s = m \circ s.$$

Алгоритми обчислення арифметичної функції $s(m) = m+1$ на основі категорного підходу можна описати синтаксичними конструкціями виду:

function $s(m)$
  begin
    $s = m \circ \langle 1_N, O_N \circ s\rangle \circ \oplus$
  end,

де $m \circ O_N \circ s = 0 \circ s$. Остання композиція відповідає одиниці в категорній інтерпретації.

Переваги останнього підходу до побудови формальних моделей алгоритмів полягають в тому, що під натурально-числовим об'єктом можна розуміти все що завгодно, починаючи від класичних моделей в категорії ***Set*** і кінчаючи категорією доведень, об'єкти якої – формули, а морфізми – формальні виведення одних формул із інших в деякій системі дедуктивного виведення.

6. Висновки

По типовому λ-численню $\mathfrak{I}$ можна побудувати декартово замкнуту категорію $C(\mathfrak{I})$. Існує категорія нечітких множин. Існує категорія нечтких функцій. Існує категорія частково рекурсивних функцій. Отже, розглянуті моделі обчислень можна розглядати в рамках тих чи інших категорій і будувати абстрактну теорію обчислюваності і відповідні мови програмування на категорній основі. Розробка мови Haskell є першим кроком в цьому напрямку.

Література

1. А.И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. – Москва. – Наука, 1965.
2. Х. Барендрехт. Ламбда-исчисление. – М.: Мир, 1985.
3. L. Rutkowski. Metody i TechnikiSztucznejInteligencji (inPolish). Wydawnictwo Naukove PWN, Warszava, 2009.
4. M. Barr, C. Wells. Category Theory for Computing Science. Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 22, 2012.

Чеботарьов Анатолій Миколайович, доктор техн. наук, ст.наук. співробітник.

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова, НАН України,

e-mail: ancheb@gmail.com;

МОНАДИЧНІ ЛОГІКИ LP і LF ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЯК МОВИ СПЕЦИФІКАЦІЇ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ

Чеботарьов А.М.

Ключові слова: (логіки першого порядку, формули минулого часу, формули майбутнього часу, автоматна семантика).

ВСТУП.

В задачах специфікації, верифікації і синтезу реактивних систем суттєве значення мають логічні мови, тобто мови, в основі яких лежать різні фрагменти логік одномісних предикатів. Це такі логіки як монадичні логіки другого порядку, тобто логіки другого порядку з одномісними предикатами, типовим представником яких є S1S [1] (монадична логіка другого порядку з одним наступником); μ-числення [2], що базуються на використанні операторів найменшої та найбільшої нерухомої точки; темпоральні логіки з лінійним часом (LTL) і розгалуженим часом (CTL, CTL*) [3], і, нарешті, різні логіки першого порядку, серед яких найбільш популярна логіка MFO[<] [4], тобто логіка першого порядку з одномісними предикатами, яка інтерпретується на лінійних структурах, іншими словами, монадична теорія першого порядку лінійно упорядкованих множин. Усі ці логіки — це розв'язні логіки, які мають різні виразні можливості (тобто класи властивостей, які вони описують) і, відповідно, різну часову складність розв'язної процедури, зокрема, процедури перевірки виконуваності формули на моделі.

Для розв'язання задач синтезу в [5, 6] були запропоновані надто обмежені фрагменти логіки MFO[<], які дозволили отримати достатньо ефективні алгоритми. В цій статті розглядаються два фрагменти логіки MFO[<], які суттєво розширили можливості мов специфікації практично без ускладнення процедури синтезу. Один з цих фрагментів (логіка LP) дає можливість характеризувати поточну поведінку системи, виходячи із поведінки у минулому, а другий (логіка LF) — враховуючи потрібну поведінку в майбутньому. Визначається автоматна семантика цих логік, і досліджуються властивості автоматів, які вони специфікують. Оскільки в статті не розглядаються питання взаємодії автомата з його оточенням, розглядається автоматна модель без виходів, вхідний алфавіт якої відповідає добутку вхідного і вихідного алфавітів трансд'юсера. При визначенні автоматної семантики логічної мови вона, так само як і автомат, розглядається як формалізм для завдання множин нескінченних слів (надслів). Необхідні відомості щодо множин нескінченних слів (ω-мов) наведено у наступному розділі.

НЕСКІНЧЕННІ СЛОВА І АВТОМАТИ

Нехай Σ — скінченний алфавіт, $\mathbf{Z}$ — множина цілих чисел, $\mathbf{N}^+ = \{z \in \mathbf{Z} \mid z > 0\}$, $\mathbf{N}^- = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \le 0\}$. Відображення r множини $\{1, \ldots, n\}$ $(n \ge 0)$ в Σ називається словом довжини n в алфавіті Σ і позначається $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$, де $\sigma_i = r(i)$ для усіх $1 \le i \le n$. Слово довжини 0 (порожнє слово) позначається ε. Відображення $u : \mathbf{Z} \to \Sigma$ називається двобічним надсловом (**Z**-словом) в алфавіті Σ і позначається $\ldots\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0\sigma_1\sigma_2\ldots$, де $\sigma_i = u(i)$, $i \in \mathbf{Z}$. Відображення $l : \mathbf{N}^+ \to \Sigma$ і $g : \mathbf{N}^- \to \Sigma$ називаються відповідно надсловом (позначається $\sigma_1\sigma_2\cdots$, де $\sigma_i = l(i)$, $i \in \mathbf{N}^+$) і зворотним надсловом (позначається $\cdots\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0$, де $\sigma_i = g(i)$ для $i \in \mathbf{N}^-$). Множина усіх слів в алфавіті Σ, включаючи порожнє слово, позначається Σ^*, множина усіх надслів — Σ^ω, а множина усіх зворотних надслів — $\Sigma^{-\omega}$. Множину усіх двобічних надслів в алфавіті Σ позначимо $\Sigma^{\mathbf{Z}}$. На множині $\Sigma^* \cup \Sigma^{-\omega} \cup \Sigma^\omega$ визначимо звичайним чином (часткову) операцію конкатенації «·», яку поширимо також на множини слів і надслів. Нехай $L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$, тоді $L_1 \cdot L_2 = \{r \cdot l \mid r \in L_1, l \in L_2\}$.

Зворотне надслово g називається префіксом **Z**-слова u, а надслово l — його суфіксом, якщо $g \cdot l = u$. Слово r називається префіксом надслова l, якщо існує таке надслово l_1, що $l = r \cdot l_1$.

Множину Σ^ω будемо розглядати як топологічний простір з так званою природною топологією [7]. Відкритими множинами в цій топології є усі множини вигляду $K \cdot \Sigma^\omega$, де $K \subseteq \Sigma^*$. Доповнення відкритої множини в Σ^ω називається замкнутою множиною. Замкнута множина характеризується наступним твердженням [7].

Твердження 1. Множина L замкнута тоді й тільки тоді, коли кожне надслово, яке не належить L, має скінченний префікс, який не є префіксом ніякого надслова з L.

Іншими словами, будь яке надслово, кожний префікс якого є префікс надслова з L, належить L.

Нехай $R \subseteq \Sigma^\omega$. Найменша замкнута множина, що включає R, називається замиканням R і позначається $\overline{R}$.

Для опису множин надслів різного типу будемо використовувати регулярні вирази. Спочатку визначимо над множинами слів операції скінченної ітерації «*» і нескінченної ітерації.

Нехай $R \subseteq \Sigma^*$, операція ітерації над R визначається наступним чином: $R^* = \{r_1 r_2 \ldots r_n \mid n \ge 0, r_i \in R\}$, зазначимо, що $n = 0$ відповідає порожньому слову.

Нескінченна ітерація в залежності від типу результату має три модифікації: для надслів — «$^\omega$», для зворотних надслів — «$^{-\omega}$» і для **Z**-слів — «$^{\mathbf{Z}}$».

$$R^\omega = \{r_0 r_1 r_2 \ldots \mid \text{для усіх } i \ge 0\ r_i \in R \setminus \varepsilon\};$$

$$R^{-\omega} = \{\ldots r_2 r_1 r_0 \mid \text{для усіх } i \ge 0\ r_i \in R \setminus \varepsilon\};$$

$$R^{\mathbf{Z}} = \{\ldots r_2 r_1 r_0 r_1 r_2 \ldots \mid \text{для усіх } i \in \mathbf{Z}\ \ r_i \in R \setminus \varepsilon\}.$$

Регулярні вирази для опису множин надслів, зворотних надслів і **Z**-слів — це скінченні об'єднання відповідно виразів вигляду UR^{ω}, $R^{-\omega}U$ і для **Z**-слів $R_1^{-\omega}UR_2^{\omega}$ або $R^{\mathbf{Z}}$, де R, R_1, R_2 і U — вирази, що побудовані з символів алфавіту Σ за допомогою операцій об'єднання, конкатенації (символ конкатенації будемо часто опускати) і скінченної ітерації.

Розглянемо тепер автоматну модель, що використовується для визначення автоматної семантики логічних мов в задачах синтезу реактивних систем. Для цього зазвичай використовуються автомати над нескінченними словами.

Визначення 1. Скінченний неініціальний X/Y-автомат A — це четвірка $\langle X, Y, Q, \chi_A\rangle$, де X, Y, Q — скінченні множини відповідно вхідних символів, вихідних символів і станів, а $\chi_A : Q \times X \times Y \to 2^Q$ — функція переходів автомата.

X/Y-автомат A називається квазідетермінованим, якщо для будь яких $q \in Q$, $x \in X$, $y \in Y$ $|\chi_A(q,x,y)| \le 1$. Квазідетерміновані X/Y-автомати зручно розглядати як детерміновані часткові автомати без виходу, з вхідним алфавітом $\Sigma = X \times Y$. Такий автомат $A = \langle \Sigma, Q, \delta_A\rangle$, де $\delta_A : Q \times \Sigma \to Q$ — часткова функція, будемо називати Σ-автоматом.

Будемо вважати, що символи алфавіту Σ — це двійкові вектори довжини m, що відповідає кодуванню абстрактних символів наборами значень двійкових змінних із множини $\Omega = \{x_1, ..., x_m\}$. Цим змінним відповідають предикатні символи у логічних специфікаціях автоматів.

Визначення 2. Σ-автомат $A = \langle \Sigma, Q, \delta_A\rangle$ називається циклічним, якщо для кожного $q \in Q$ існують такі $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ і $q_1, q_2 \in Q$, що $q_1 = \delta_A(q, \sigma_1)$ і $q = \delta_A(q_2, \sigma_2)$.

В подальшому під Σ-автоматом будемо розуміти циклічний Σ-автомат. Такий автомат можна однозначно охарактеризувати в термінах припустимих надслів.

Визначення 3. Надслово $l = \sigma_1\sigma_2\ldots$ в алфавіті **Σ** припустимо в стані q автомата A, якщо існує таке надслово станів $q_0 q_1 q_2 \ldots$, де $q_0 = q$, що для кожного $i = 0, 1, 2, \ldots$ $q_{i+1} = \delta_A(q_i, \sigma_{i+1})$.

Надслово l припустимо для автомата A, якщо воно припустимо хоча бы в одному з його станів. Множину усіх надслів, які припустимі для автомата A, позначимо $W(A)$.

Визначення 4. Зворотне надслово $\ldots\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0$ в алфавіті Σ представлене станом q Σ-автомата A, якщо існує таке зворотне надслово станів $\ldots q_{-2} q_{-1} q_0$, де $q_0 = q$, що для кожного $i = -1, -2, -3, \ldots$ виконується $\delta_A(q_i, \sigma_{i+1}) = q_{i+1}$.

Таким чином, с кожним станом q циклічного Σ-автомата асоціюються дві множини надслів: множина $W(q)$ усіх надслів, що припустимі в стані q, і множина $P(q)$ усіх зворотних надслів, що представлені станом q.

Визначення 5. Нехай множина Q станів Σ-автомата A дорівнює $\{q_1, \cdots, q_n\}$. Родину множин надслів $S(A) = (W_1, \ldots, W_n)$, де $W_i = W(q_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ назвемо поведінкою автомата A.

ЛОГІКИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Монадичні логіки першого порядку використовуються для завдання ω-мов, що дозволяє встановити тісний зв'язок між логіками і автоматами. До найбільш вивчених таких логік належить логіка F1S (монадична логіка першого порядку з одним наступником), та логіка MFO[<], сигнатура якої містить двомісний предикатний символ <, що інтерпретується як лінійний порядок на натуральних числах. Нижче буде розглянута саме така логіка (MFO).

Алфавіт цієї логіки складається із символів таких типів:

1) множина змінних $V = \{t, t_1, t_2, \ldots\}$;
2) множина одномісних предикатних симіолів $\Omega = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, $m \in \mathbf{N}^+$;
3) двомісні предикатні символи = і < ;
4) унарний функціональний символ SUC;
5) логічні зв'язки;
6) квантори $\exists$ та $\forall$;
7) дужки.

Крім того, додатково визначаються відношення $t_1 \le t_2$, $t_1 \ge t_2$, а також вводиться скорочення $\mathrm{SUC}(t) = t+1$, $\mathrm{SUC}(\mathrm{SUC}(t)) = t+2$ і т.д. Таким чином, терми мають вигляд $(t_i + k)$, де $t_i \in V$, $k \in \mathbf{N}$. Атомарні формули можуть бути двох типів: $P_i(\tau)$ або $\tau_1 \rho \tau_2$, де $P_i \in \Omega$, $\rho \in \{=, <, >, \le, \ge\}$, а τ, τ_1, τ_2 — терми. Формули будуються з атомарних формул за допомогою логічних зв'язок, кванторів, які застосовуються до предметних змінних, і, можливо, дужок. Позначення $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ використовується для вказування того, що всі вільні змінні у формулі містяться серед $t_1, \ldots, t_n$. Формула, яка не містить вільних змінних, називається замкнутою або реченням. Формули інтерпретуються на множині натуральних чисел $\mathbf{N}$.

Множина надслів в алфавіті Σ (ω-мова), що задається реченням φ, визначається наступним чином. Між одномісними предикатними символами в формулі φ та двійковими змінними $x_1, x_2, \ldots, x_m$, набори значень яких кодують символи алфавіту Σ, встановлюється взаємно однозначна відповідність. Надслово $l \in \Sigma^\omega$ визначає набір предикатів P_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, істинних у тих і тільки тих його позиціях, в яких i-й елемент набору значень змінних дорівнює 1. Таким чином, надслово l можна розглядати як інтерпретацію формули φ, при якій кожний предикатий символ, що відповідає змінній x_i, інтерпретується предикатом P_i. Істинність речення φ при цій інтерпретації будемо позначати $l \models \varphi$. Формула φ визначає ω-мову $L(\varphi) = \{l \in \Sigma^\omega \mid l \models \varphi\}$.

ЛОГІКИ З ОБМЕЖЕНИМИ КВАНТОРАМИ

Моделі дискретного часу, які використовуються у більшості логік, ізоморфні натуральним числам, тобто визначають час, скінченний у минулому і нескінченний у майбутньому. Однак багато тверджень, що виникають у процесі побудови специфікації системи, виражаються простіше і натуральніше при використанні значень змінних в моменти часу, що передують поточному.

Найбільш просте і природне розв'язання цієї проблеми полягає у розгляді часу, нескінченного в обидві боки, тобто ізоморфного множині цілих чисел. Це також суттєво спрощує перетворення формул специфікації в процесі синтеза в наслідок їхньої інваріантності відносно зсуву у часі. У цьому випадку для опису семантики логічних специфікацій використовуються циклічні автоматні моделі, функціонування яких не прив'язане до конкретного моменту часу. Фрагменти логіки MFO, що розглядаються в подальшому, інтерпретується на множині **Z** цілих чисел.

Визначення 6. Формула $F(t)$, з єдиною вільною змінною *t*, називається k-обмеженою справа ($k \in \mathbf{Z}$), якщо для будь якого $\tau \in \mathbf{Z}$ значення формули $F(\tau)$ на всіх двобічних надсловах, з однаковими $(\tau + k)$-префіксами, збігаються.

Визначення 7. Формула $F(t)$, з єдиною вільною змінною *t*, називається k-обмеженою зліва ($k \in \mathbf{Z}$), якщо для будь якого $\tau \in \mathbf{Z}$ $\tau \in \mathbf{Z}$ значення формули $F(\tau)$ на всіх двобічних надсловах, з однаковими $(\tau + \mathrm{k})$-суфіксами, збігаються.

Формули вигляду $\forall t F(t)$ називаються формулами минулого часу (P-формули), якщо $F(t)$ обмежена справа, і формулами майбутнього часу (F-формули), якщо $F(t)$ обмежена зліва.

Розглянемо фрагмент логіки MFO, що визначається наступним чином.

Усі замкнуті формули (речення) мають вигляд $\forall t F(t)$, де $F(t)$ — формула, з однією вільною змінною. Таким чином, замкнуті формули $\forall t_1 F_1(t_1) \vee \forall t_2 F_2(t_2)$ або $\neg \forall t F(t)$ не належать до фрагменту, що розглядається. Кожна підформула формули $F(t)$ має не більш двох вільних змінних. Усі кванторні підформули з єдиною вільною (у цій підформулі) змінною мають вигляд $\exists t_1 (t_1 \le t + k) F_1(t_1)$ або $\forall t_1 (t_1 \le t + k) \to F_1(t_1)$, а кванторні підформули з двома вільними змінними — $\exists t_2 (t_1 < t_2 \le t + k) F_2(t_2)$ або $\forall t_2 (t_1 < t_2 \le t + k) \to F_2(t_2)$, де $k \in \mathbf{Z}$. Вирази $(t_1 \le t + k)$ і $(t_1 < t_2 \le t + k)$ в цих кванторних підформулах називаються обмеженнями області дії кванторів, а самі квантори — обмеженими. Атомарні формули вигляду $\tau_1 \rho \tau_2$, де τ_1 і τ_2 — терми, а $\rho \in \{<, >, \le, \ge\}$, зустрічаються тільки в обмеженнях області дії кванторів. Кожна така формула рівносильна формулі вигляду $(t_1 \le t_2 + k)$, де $k \in \mathbf{Z}$. В усьому іншому синтаксис цього фрагменту відповідає синтаксису логіки MFO.

Мова специфікації, яку назвемо мовою LP, складається тільки із речень цього фрагменту. Очевидно, що формули з однією вільною змінною, які задовольняють наведеним вимогам, обмежені справа. Таким чином, мову LP складають P-формули.

Моделі (інтерпретації) для формули $F = \forall t F(t)$ будемо ототожнювати з двобічними надсловами в алфавіті Σ, який визначається одномісними предикатними символами, що зустрічаються у формулі *F*.

Множину всех моделей для формули *F* позначимо $M(F)$. Крім того, для описання автоматної семантики формули *F* знадобляться ще дві множини:

$P(F)$ — множина префіксів усіх моделей з $M(F)$,

$W(F)$ — множина суфіксів усіх моделей з $M(F)$.

Для формули $F = \forall t F(t)$ визначимо дві автоматні семантики: детерміновану і недетерміновану. Детермінована семантика однозначно ставить у відповідність формулі F детермінований Σ-автомат. Недетермінована семантика — відповідно недетермінований Σ-автомат.

Розглянемо спочатку детерміновану семантику.

Кожному зворотному надслову $g \in P(F)$ поставимо у відповідність множину надслів $S_g = \{l \in W(F) \mid g \cdot l \in M(F)\}$, тобто S_g складається з усіх тих надслів, конкатенація кожного з яких з префіксом g відповідає моделі для F. Назвемо такі надслова припустимими продовженнями префікса g.

На множині префіксів $P(F)$ визначимо відношення еквівалентності так, що два префікси g_1 і g_2 еквівалентні, якщо вони мають одну й ту саму множину припустимих продовжень. Ця еквівалентність розбиває множину $P(F)$ на класи еквівалентності $P_1, P_2, \ldots, P_n$, так що класу P_i відповідає стан q_i Σ-автомата, що специфікований формулою F. Визначення функції переходів має вигляд: $\delta(q_i, \sigma) = q_j$ тоді й тільки тоді, коли $P_i\sigma \subseteq P_j$. Із цього визначення відразу випливає, що функція переходів детермінована. Дійсно, оскільки множини $P_1, P_2, \ldots, P_n$ попарно не перетинаються, наведеному співвідношенню може задовольняти тільки єдина множина P_j.

Розглянемо приклад побудови за P-формулою автомата, який визначається детермінованою семантикою.

Приклад 1.

Нехай $F = \forall t F(t)$, де $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t+2) b(t_1) \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \to a(t_2)$ і $\Sigma = \{a, b, c\}$. Можна показати, що множина моделей для формули F дорівнює $(\Sigma ba^* \cup \Sigma\Sigma ba^* \cup ba^*)^{\mathbf{Z}} \cup (\Sigma ba^* \cup \Sigma\Sigma ba^* \cup ba^*)^{-\omega} a^{\omega}$.

З цього виразу видно, що префікси з множини $P(F)$ можуть закінчуватися тільки словами b, ba, aa, bc, ac, ca, cc. Зазначимо, що останні чотири слова відповідають ΣΣ.

Наведемо розбиття множини префіксів $P(F)$ на класи еквівалентності:

P_1 — префікси, що закінчуються словами із $\bar{c}a \vee b = \{aa, ba, b\}$, P_2 — префікси, що закінчуються словами із $\bar{c}c = \{ac, bc\}$, P_3 — префікси, що закінчуються словами ca, cc.

Очевидно, що ці умови визначають розбиття $\{P_1, P_2, P_3\}$ множини $P(F)$. Побудуємо тепер відношення між класами розбиття, що визначає функцію переходів автомата $A(F)$. Оскільки конкретні множини префіксів із $P(F)$ не розглядаються, відношення мають бути такими, що для кожного $\sigma \in \Sigma$ відношення $P_i\sigma \subseteq P_j$ виконується тоді й тільки тоді, коли із того, що $g \in P_i$ є префікс деякої моделі для F, випливає, що $g\sigma$ також — префікс моделі для F. Ця вимога забезпечується шляхом врахування обмежень на припустимі фрагменти двобічних надслів, що визначаються множиною моделей $M(F)$. Так наприклад, $P_3(a \vee c) = \varnothing$, оскільки слова caa, cca, cac і ccc не можуть бути фрагментами жодної моделі для F, а $P_3 b \subseteq P_1$, оскільки префікси з множини $P_3 b$ мають

закінчення $c\bar{b}b = \{cab, ccb\}$ і, отже, належить тільки P_1. В результаті необхідні відношення мають вигляд $P_1a \subseteq P_1, P_1b \subseteq P_1, P_1c \subseteq P_2, P_2a \subseteq P_3,\ P_2b \subseteq P_1, P_2c \subseteq P_3, P_3b \subseteq P_1$.

Те, що класи розбиття складаються з еквівалентних префіксів, випливає з того, що наведені відношення для усіх префіксів, що належать одному й тому ж класу розбиття, визначають одну й ту ж множину припустимих продовжень. Таким чином, маємо автомат з трьома станами, наведений на рис. 1.

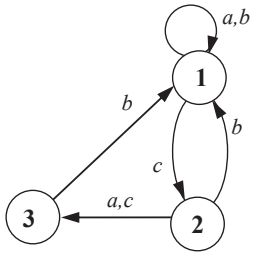


Рис.1

Недетерміновану семантику сформулюємо симетричним образом.

Кожний суфікс $l \in W(F)$ визначає множину $P(l)$ припустимих для нього префіксів, тобто $P(l) = \{g \in P(F) \mid g \cdot l \in M(F)\}$. На множині суфіксів $W(F)$ визначимо відношення еквівалентності так, що два суфікси l_1 і l_2 еквівалентні, якщо вони мають одну й ту ж саму множину припустимих для них префіксів. Ця еквівалентність розбиває множину $W(F)$ на класи еквівалентності $S_1, S_2, \ldots, S_n$, кожному з яких відповідає стан специфікованого Σ-автомата. Функція переходів визначається наступним чином: для $\sigma \in \Sigma$ $\delta'(q_i, \sigma) = \{q_{i_j}\}$, де $\{q_{i_j}\}$ — множина всіх таких q_{i_j}, для яких виконується відношення $\sigma S_{i_j} \subseteq S_i$. Формула F специфікує Σ-автомат $A(F)$ з поведінкою $(\bar{S}_1,\ldots,\bar{S}_n)$, де $\bar{S}_i$ — замикання множини S_i. Як випливає із наведених семантик, детермінований і недетермінований автомати, які специфікує формула F, слабо еквівалентні, тобто мають одну й ту саму множину припустимих надслів, яка дорівнює $\overline{W(F)}$.

Приклад 2. Побудуємо для формули F із прикладу 1 автомат, що відповідає недетермінованій семантиці. Нагадаємо, що множина $M(F)$ для цієї формули дорівнює $(\Sigma ba^* \cup \Sigma\Sigma ba^* \cup ba^*)^{\mathbf{Z}} \cup (\Sigma ba^* \cup \Sigma\Sigma ba^* \cup ba^*)^{-\omega} a^{\omega}$. Визначимо розбиття множини суфіксів $W(F)$ на класи еквівалентності у відповідності до їх початкових відрізків. Це розбиття складається з трьох класів: S_1, S_2, S_3. Суфікси із S_1 починаються словами із $a\bar{b}$ та $c\bar{b}b$, суфікси із S_2 — словами із $\bar{b}b$, де $\bar{b} = (a \vee c)$, а суфікси із S_3 починаються символом b. Розбиття здійснювалося, виходячи з таких же вимог, як і в прикладі 1, які гарантують, що класи складаються з еквівалентних суфіксів. Більш того, це є класи еквівалентності, оскільки ніякі два класи не мають одну і ту ж множину припустимих

префіксів. Так, є префікс, що закінчується символом c, припустимий для S_2 та S_3 і неприпустимий для S_1. Префікс, що закінчується символами cc, припустимий для S_3 і неприпустимий для S_2. Таким чином, автомат $A(F)$ має три стани. Множина співвідношень між класами розбиття, що визначає функцію переходів автомата $A(F)$, виглядає наступним чином.

$aS_1 \subseteq S_1, bS_1 \subseteq S_3,\ aS_2 \subseteq S_1, bS_2 \subseteq S_3, cS_2 \subseteq S_1,\ aS_3 \subseteq S_2, bS_3 \subseteq S_3, cS_3 \subseteq S_2$.

Відповідний автомат $A(F)$ наведений на рис. 2.

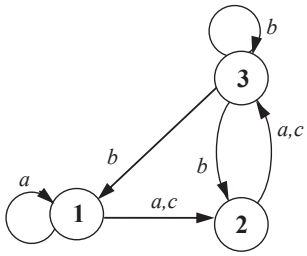


Рис. 2.

Вище розглядався фрагмент LP логіки MFO, множина речень якого складається з P-формул. Розглянемо тепер в деякому сенсі симетричний фрагмент LF для подання F-формул. Синтаксис мови LF співпадає з синтаксисом мови LP в усьому, крім вигляду обмежень області дії кванторів. Так, усі кванторні підформули з однією вільною змінною мають вигляд $\exists t_1(t_1 \geq t+k)F_1(t_1)$ або $\forall t_1(t_1 \geq t+k) \to F_1(t_1)$, а кванторні підформули з двома вільними змінними — $\exists t_2(t_1 > t_2 \geq t+k)F_2(t_2)$ або $\forall t_2(t_1 > t_2 \geq t+k) \to F_2(t_2)$, де $k \in \mathbf{Z}$. Обидві розглянуті автоматні семантики для мови LP поширюються і на мову LF.

Розглянемо приклади застосування детермінованої і недетермінованої семантики для визначення Σ-автоматів, що специфіковані LF-формулами.

Приклад 3. $F = \forall t(a(t) \to \exists t_1(t_1 > t)b(t_1))$. $\Sigma = \{a,b,c\}$. Побудуємо автомат $A(F)$**,** що специфікується формулою F відповідно до детермінованої семантики.

Формула F визначає множину **Z**-слів, в яких після кожного символу a зустрічається символ b. Формально це виражається у вигляді $M(F) = (b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^{\mathbf{Z}}$, тобто моделі побудовані з відрізків двох типів: які не містять символу a та відрізків, які починаються символом a і закінчуються символом b.

Розбиття множини префіксів $P(F)$ на класи еквівалентності $P_1 \cup P_2$ відповідає двом типам префіксів: 1) префікси, що закінчуються словами із множини bc^*, тобто $\{b, bc, bcc, \ldots\}$, або префікси, які не містять символу a, тобто мають вигляд $(b \vee c)^{-\omega}$ і 2) префікси, що закінчуються словами із множини $a\,(a \vee c)^*$.

$P_1 = (b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^{-\omega}$, $P_2 = (b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^{-\omega} a(a \vee c)^*$. $P_1 \cap P_2 = \varnothing$.

Множини припустимих продовжень префіксів, що відповідають цим класам префіксів, мають такий вигляд:

$S_1 = (b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^{\omega}$. $S_2 = (a \vee c)^* b(b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^{\omega}$.

Нескладно переконатися у справедливості наступних відношень.
$P_1(b \vee c) \subseteq P_1$, $P_1 a \subseteq P_2$, $P_2(a \vee c) \subseteq P_2$, $P_2 b \subseteq P_1$.
Автомат, що визначається цими відношеннями, наведено на рис. 3.
Множини $W(1)$ та $W(2)$ дорівнюють замиканням відповідно S_1 і S_2.

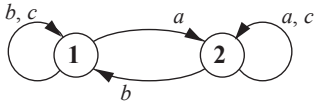


Рис. 3.

Зазначимо, що хоча $S_1 \neq S_2$, їхні замикання збігаються $\overline{S}_1 = \overline{S}_2 = \Sigma^{\omega}$. В наслідок чого цей автомат $A(F)$ не приведений.

Приклад 4. Для формули F із попереднього прикладу побудуємо автомат $A'(F)$**,** відповідно до недетермінованої семантики**.**

Покажемо, що розбиття множини $W(F)$ на класи еквівалентності має вигляд:

$$S_1 = (b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^* b(b \vee c \vee a(a \vee c)^* b)^{\omega},\ S_2 = c^{\omega}.$$

Множини S_1 та S_2 не перетинаються, тому, що усі надслова першої з них містять символ b. Множина припустимих для S_1 префіксів співпадає з $P(F)$, оскільки усі надслова з S_1 мають суфікс, який починається символом *b*, після якого кожний символ *a* передує деякому символу b. Для S_2, що складається з одного надслова, покажемо, що ніяке інше надслово не має такої множини припустимих префіксів, як надслово c^{ω}. Якщо надслово містить символ *b*, тоді для нього припустимий префікс вигляду la, де $l \in \Sigma^{-\omega}$, який не є припустимим для c^{ω}. Якщо надслово містить символ *a*, то воно містить і символ *b*, і, отже, має припустимий префікс, який не є припустимим для c^{ω}. Залишається показати, що $S_1 \cup S_2 = W(F)$. Доповнення множини $\Sigma^* b \Sigma^{\omega}$ дорівнює $(a \vee c)^{\omega}$, однак ніякий суфікс із $W(F)$ не може містити *a* і не містити *b*, тому доповнення S_1 до $W(F)$ дорівнює c^{ω}. Нескладно побачити, що виконуються наступні співвідношення: $\Sigma S_1 \subseteq S_1$, $bS_2 \subseteq S_1$, $cS_2 \subseteq S_2$, $aS_2 \not\subset W(F)$, що відповідає недетермінованому автомату $A'(F)$, який наведено на рис. 4.

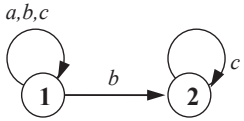


Рис. 4.

Детермінізація цього автомата дає автомат, отриманий у прикладі 3.

ВИСНОВКИ

При розв'язанні задач синтезу автоматних моделей велике значення має вибір мови специфікації, яка дозволяє специфікувати достатньо широкий клас автоматів певного вигляду і забезпечує прийнятну складність процедури синтезу. Очевидно, що чим простіше синтаксис мови специфікації, тим менше складність процедури синтезу. Виходячи із цих міркувань в [5] як мова специфікації використовувалася підмножина L логіки MFO, формули якої мають вигляд $\forall tF(t)$, де $F(t)$ — формула, яка не містить кванторів і символів числових відношень. Клас автоматів, які можна специфікувати цією мовою, складають автомати зі скінченною пам'яттю. В [6] ця мова розширена конструкцією, яка містить обмежені квантори, що дало можливість специфікувати деякі автомати, які не є автоматами зі скінченною пам'яттю. Обидві ці логіки інтерпретуються на множині цілих чисел.

У цій роботі розглянуті два фрагменти LP і LF логіки MFO з обмеженими кванторами, які також інтерпретуються на цілих числах. В логіці LP поточний стан системи однозначно визначається її попередньою поведінкою, а в логіці LF — її майбутньою поведінкою. Мова LP розширює виразні можливості мови із [6], практично не ускладняючи алгоритму синтезу. Зазвичай під виразними можливостями логічної мови розуміють клас властивостей, які можна виразити цією мовою. Тут під виразними можливостями мови розуміється клас автоматів, які можна специфікувати цією мовою. Мова LF дає альтернативні можливості для специфікації автоматів. Це зручно у тих випадках, коли вимоги, що визначає специфікація, відносяться до майбутнього, наприклад, «після кожного запиту має бути реакція на нього». Те, що усі речення обох мов починаються квантором $\forall t$, обумовлено тим, що формули специфікації мають описувати вимоги до поведінки автомата у будь який момент часу, тобто у кожному його стані.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Thomas W. Automata on infinite objects // Handbook of Theoretical Comput. Sci./ J. van Leeuwen (ed.). —Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990. — P. 134–191.

2. Stomp F.A., de Rover W.P., Gerth R.T. The μ-calculus as an assertion language for fairness arguments // Information and computation. — 1989. — vol. 82. — P. 278–322.

3. Emerson E.A. Temporal and modal logic // Handbook of Theoretical Comput. Sci. / J. van Leeuwen (ed.) —Amsterdam: Elsevier Sci. Publishers, 1990. — P. 996–1071.

4. Schneider K. Verification of reactive systems // Springer Berlin, Heidelberg, 2004. — 604 p.

5. Чеботарев А.Н. Регулярная форма спецификации детерминированных автоматов в языке L // Прикладная дискретная математика. — 2010. — № 4. — С.64–72.

6. Чеботарев А.Н. Расширение логического языка спецификации и проблема синтеза // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — №6. — С. 11–27.

7. Finkel O. Topological Properties of Omega Context Free Languages // Theoretical Comput. Sci. — 2001. — **262** (1-2). — P. 669-697.

Шкільняк Степан Степанович, доктор фіз.-мат. наук, професор

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ З РІВНІСТЮ ТА ПРЕДИКАТНИМ ДОПОВНЕННЯМ

Шкільняк С.С.

We propose and investigate new classes of program-oriented logical formalisms – first-order logics of partial quasiary predicates with equality and operation of predicate complement. We use similar operations in different Floyd-Hoare program logics with partial pre- and post-conditions. The specific feature of the proposed logics is the use of the special 0-ary compositions of weak $=_{xy}$ and strong equality $\equiv_{xy}$. We denote these logics by LC= and LC≡. We describe composition algebras and languages of the proposed logics. Emphasis is made on the study of the interaction of the compositions of renomination and predicate complement with equality. A number of logical consequence relations of the types $|\!=_{IR}$, $|\!=_{T}$, $|\!=_{F}$ for these logics are considered. Properties of the introduced relations of logical consequence are investigated, conditions that guarantee their validity are described, properties of decomposition of formulas are formulated. On this semantic basis, a series of sequent-type calculi for the proposed logics is planned to be constructed.

Key-words: logic, predicate, equality, composition algebra, logical consequence.

Ключові слова: логіка, предикат, рівність, композиційна алгебра, логічний наслідок.

Поняття і методи математичної логіки засвідчують високу ефективність при розв'язанні широкого спектра задач інформатики й програмування (див., напр., [1]). Особливе місце серед них посідають задачі, пов’язані з розробкою надійного програмного забезпечення, найперше, із побудовою систем специфікації та верифікації програм. До найпоширеніших логічних формалізмів, які успішно використовуються в системах верифікації, належать логіки Флойда-Хоара [2, 3]. Такі логіки базуються на класичній логіці предикатів, яка в недостатній мірі враховує неповноту, частковість інформації про предметну область. Традиційні логіки Флойда-Хоара використовують тотальні перед- та після-умови, які описуються тотальними однозначними предикати, тому було запропоновано [4] узагальнення цих логік на випадок часткових предикатів. Основою такого узагальнення стало введення спеціальної немонотонної операції (композиції) предикатного доповнення. Композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових квазіарних предикатів, розширені композицією предикатного доповнення, названо LC. Пропозиційні LC детально описано в [5], реномінативні розглянуто в [6], дослідженню чистих першопорядкових LC присвячено роботу [7].

В даній статті запропоновано розширити першопорядкові LC спеціальними предикатами рівності. Такі предикати дають змогу ототожнити й розрізнити значення предметних імен. Можна виділити [8] два різновиди цих предикатів: слабкої рівності та строгої (точної) рівності. Це дає відповідні різновиди LC: LC з предикатами слабкої рівності, які назвемо LC=, та LC з предикатами строгої рівності, які назвемо LC≡.

В цій статті описано композиційні алгебри та мови першопорядкових LC= та LC≡. Основну увагу зосереджено на вивченні властивостей, пов’язаних з предикатами слабкої рівності й строгої рівності та з композицією предикатного доповнення. Для LC= та LC≡ запропоновано і досліджено низку відношень логічного наслідку. Властивості цих відношень є семантичною основою подальшої побудови для пропонованих логік числень секвенційного типу.

Поняття, які в в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [5, 9].

1. Композиційні алгебри логік з предикатним доповненням та рівністю

Ми розглядаємо квазіарні предикати реляційного типу, або R-предикати. Це часткові неоднозначні функції вигляду $Q : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^{V}\!A$ – множина всіх V-A-іменних множин, V та A – множини предметних імен та базових значень.

Позначаємо $Q[d]$ множину всіх значень, які R-предикат Q може приймати на аргументі $d \in {}^{V}\!A$. Така $Q[d]$ може бути одією з множин $\varnothing$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$. Отже, кожний R-предикат Q можна задати за допомогою 2-х множин – області істинності $T(Q)$ та області хибності $F(Q)$:

$$T(Q) = \{d \mid T \in Q[d]\};\ \ F(Q) = \{d \mid F \in Q[d]\}.$$

Область невизначеності предиката Q задається так: $\perp(Q) = \overline{T(Q) \cup F(Q)} = \overline{T(Q)} \cap \overline{F(Q)}$.

R-предикат Q монотонний, якщо: $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \subseteq Q[d_2]$.

R-предикат Q частковий однозначний або P-предикат, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$.

R-предикат Q тотальний, або T-предикат, якщо $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}\!A$.

Для однозначних функцій далі пишемо $f(d)\downarrow$, якщо значення $f(d)$ визначене, та пишемо $f(d)\uparrow$, якщо значення $f(d)$ невизначене.

Тому для P-предикатів маємо $T(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = T\}$ та $F(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = F\}$.,

Можна виділити 4 константні R-предикати T, F, ⅄, ϒ; вони відповідають множинам значень $\{T\}$, $\{F\}$, $\varnothing$, $\{T, F\}$, які R-предикат може прийняти на вхідному даному. Тому:

$$T(\mathrm{T}) = F(\mathrm{F}) = {}^{V}\!A,\ \ T(\mathrm{F}) = F(\mathrm{T}) = \varnothing,\ \ T(⅄) = F(⅄) = \varnothing,\ \ T(ϒ) = F(ϒ) = {}^{V}\!A.$$

Предикати T, F, ⅄, ϒ монотонні, при цьому T, F, ⅄ однозначні.

Класи V-A-квазіарних R-предикатів та P-предикатів позначимо $Pr^{V\text{–}A}$ та $PrP^{V\text{–}A}$.

Спеціальна немонотонна 1-арна композиція предикатного доповнення ~ задається так:

$$T({}^{\sim}Q) = \perp(Q) = \overline{T(Q) \cup F(Q)},\quad F({}^{\sim}Q) = \varnothing.$$

Звідси $\perp({}^{\sim}Q) = T(Q) \cup F(Q)$.

Маємо $T({}^{\sim}Q) \cap F({}^{\sim}Q) = \varnothing$, тому ~ зберігає однозначність R-предикатів

Таким чином, класи P-предикатів та R-предикатів замкнені щодо композиції ~.

Твердження 1. $Q \in Pr^{V\text{–}A} \Rightarrow {}^{\sim}Q \in PrP^{V\text{–}A}$; $Q \in PrT^{V\text{–}A} \Rightarrow {}^{\sim}Q = ⅄$.

Звідси випливає, що клас T-предикатів незамкнений щодо ~.

Це означає, що для T-предикатів LC не мають смислу.

Таким чином, можна розглядати LC R-предикатів та LC P-предикатів.

LC R-предикатів чистого першопорядкового (кванторного) рівня називаємо L^{QC};

LC P-предикатів чистого першопорядкового рівня називаємо L^{QCP}.

На реномінативному рівні LC R-предикатів та P-предикатів називаємо L^{RC} та L^{RCP}.

В логіках квазіарних предикатів ототожнювати й розрізняти значення предметних імен можна за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності. Природно розглядати два різновиди цих предикатів:

– слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{\{x,y\}}$;

– строгої (точної) рівності $\equiv_{\{x,y\}}$.

Предикати $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ задаємо так:

$$T(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\},$$

$$F(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) \neq d(y)\};$$

$$T(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow \text{ та } d(x) = d(y)\} \cup \{d \mid d(x)\uparrow \text{ та } d(y)\uparrow\},$$

$$F(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow,\ d(x) \neq d(y)\} \cup \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\uparrow \text{ або } d(x)\uparrow,\ d(y)\downarrow\}.$$

Неістотним для предикатів $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ є кожне $z \in V \setminus \{x, y\}$.

Предикати $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ скорочено позначаємо $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$;

Для $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ також вживаними є традиційні позначення $x = y$ та $x \equiv y$.

Таким чином, $=_{xy}$ та $=_{yx}$ – це *різні* позначення *одного і того ж* предиката.

Аналогічно $\equiv_{xy}$ та $\equiv_{yx}$ – теж різні позначення одного і того ж предиката.

Предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні та немонотонні.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні та монотонні.

Окремим випадком предикатів $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$, якщо x та y – це одне і те ж предметне ім'я, є предикати $=_{\{x\}}$ та $\equiv_{\{x\}}$, які будемо позначати $=_{xx}$ та $\equiv_{xx}$, в традиційному вигляді $x = x$ та $x \equiv x$.

Кожне $z \in V \setminus \{x\}$ неістотне для $=_{xx}$ та $\equiv_{xx}$.

Для $\equiv_{xx}$ маємо $T(\equiv_{xx}) = {}^{V}A$ та $F(=_{xx}) = \varnothing$, звідки $\equiv_{xx}$ = T, це константний предикат.

Для предикатів $=_{xx}$ маємо $F(=_{xx}) = \varnothing$, такі $=_{xx}$ – часткові константні предикати.

КНЛ з предикатами рівності можна виділяти на реномінативному й кванторному (чистому першопорядковому) рівнях. Зокрема, на реномінативному рівні маємо різновиди:

– $L^{R=}$ та $L^{R\equiv}$ (для R-предикатів);

– $L^{R=P}$ та $L^{R\equiv P}$ (для P-предикатів).

На чистому першопорядковому (кванторному) рівні маємо такі різновиди:

– $L^{Q=}$ та $L^{Q\equiv}$ (для R-предикатів);

– $L^{Q=P}$ та $L^{Q\equiv P}$ (для P-предикатів).

На реномінативному рівні маємо такі різновиди LC з рівністю:

– $L^{RC=}$ та $L^{RC\equiv}$ (для R-предикатів);

– $L^{RC=P}$ та $L^{RC\equiv P}$ (для P-предикатів).

Різновиди LC з рівністю на чистому першопорядковому рівні:

– $L^{QC=}$ та $L^{QC\equiv}$ (для R-предикатів);

– $L^{QC=P}$ та $L^{QC\equiv P}$ (для P-предикатів).

Для описаних різновидів КНЛ з рівністю маємо такі множини базових композицій.

$C_{R=} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, =_{xy}\}$ – для $L^{R=}$ та $L^{R=P}$;

$C_{R\equiv} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \equiv_{xy}\}$ – для $L^{R\equiv}$ та $L^{R\equiv P}$;

$C_{RC=} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \sim, =_{xy}\}$ – для $L^{RC=}$ та $L^{RC=P}$;

$C_{RC\equiv} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \sim, \equiv_{xy}\}$ – для $L^{RC\equiv}$ та $L^{RC\equiv P}$;

$C_{Q=} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}\}$ – для $L^{Q=}$ та $L^{Q=P}$;

$C_{Q\equiv} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}\}$ – для $L^{Q\equiv}$ та $L^{Q\equiv P}$;

$C_{QC=} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \sim, =_{xy}\}$ – для $L^{QC=}$ та $L^{QC=P}$;

$C_{QC\equiv} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \sim, \equiv_{xy}\}$ – для $L^{QC\equiv}$ та $L^{QC\equiv P}$.

Стисло нагадаємо (див. [9]) визначення композицій $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$.

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$; $F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$;

$T(\exists x P) = \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in T(P)$ для деякого $a \in A\}$;

$F(\exists x P) = \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P)$ для всіх $a \in A\}$.

Композицію $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ задаємо умовою: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$ для всіх $d \in {}^{V}A$.

Семантичною основою КНЛ є композиційні системи вигляду $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_B)$, де C_B – множина базових композицій. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних $({}^{V}A, Pr^{V-A})$ та композиційну алгебру предикатів $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_B)$.

Маємо реномінативні композиційні системи R-предикатів та P-предикатів з рівністю:

$({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{R=})$; $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{R\equiv})$; $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{RC=})$; $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{RC\equiv})$;

$({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{R=})$; $({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{R\equiv})$; $({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{RC=})$; $({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{RC\equiv})$.

Відповідні реномінативні композиційні алгебри R-предикатів та P-предикатів з рівністю:

$A^{R=} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{R=})$; $A^{R\equiv} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{R\equiv})$;
$A^{RC=} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{RC=})$; $A^{RC\equiv} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{RC\equiv})$;
$A^{R=P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{R=})$; $A^{R\equiv P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{R\equiv})$;
$A^{RC=P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{RC=})$; $A^{RC\equiv P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{RC\equiv})$.

Чисті першопорядкові композиційні системи R-предикатів та P-предикатів з рівністю:
$({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{Q=})$; $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{Q\equiv})$; $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QC=})$; $({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QC\equiv})$;
$({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{Q=})$; $({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{Q\equiv})$; $({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{QC=})$; $({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{QC\equiv})$.

Чисті першопорядкові композиційні алгебри R-предикатів та P-предикатів з рівністю:
$A^{Q=} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{Q=})$; $A^{Q\equiv} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{Q\equiv})$;
$A^{QC=} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QC=})$; $A^{QC\equiv} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QC\equiv})$;
$A^{Q=P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{Q=})$; $A^{Q\equiv P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{Q\equiv})$;
$A^{QC=P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{QC=})$; $A^{QC\equiv P} = ({}^{V}A, PrP^{V-A}, C_{QC\equiv})$.

Алгебри $A^{Q=P}$, $A^{Q\equiv P}$, $A^{QC=P}$, $A^{QC\equiv P}$ є відповідно підалгебрами алгебр $A^{Q=}$, $A^{Q\equiv}$, $A^{QC=}$, $A^{QC\equiv}$.
Алгебри $A^{R=P}$, $A^{R\equiv P}$, $A^{RC=P}$, $A^{RC\equiv P}$ є відповідно підалгебрами алгебр $A^{R=}$, $A^{R\equiv}$, $A^{RC=}$, $A^{RC\equiv}$.

Стисло охарактеризуємо властивості композицій описаних вище класів КНЛ з рівністю

Властивості пропозиційних композицій аналогічні властивостям пропозиційних зв'язок класичної логіки. Властивості композицій квантифікації, не пов'язані з реномінацією, в цілому аналогічні відповідним властивостям кванторів класичної логіки.

Властивості, пов’язані з композиціями реномінації та квантифікації, аналогічні відповідним властивостям традиційної логіки квазіарних предикатів (див. [9]). Зокрема, це властивості R, RI, RU, R¬, R∨, RR, Ren, R∃s, R∃.

Для опису в перщопорядкових логіках властивостей елімінації кванторів додатково використовують спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори Ez, які визначають наявність у вхідних даних компоненти з відповідним іменем $z \in V$. Предикати Ez задаються так:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\};\ F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}.$$

Предикати-індикатори Ez тотальні, однозначні, немонотонні.

Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

Детальніше розглянемо властивості, пов’язані з предикатами рівності та композицією предикатного доповнення.

Наявність предикатів строгої рівності дає змогу задати константні предикати:

Твердження 2. $\equiv_{xx} = \mathrm{T}$ та $\equiv_{xy} \vee \neg\equiv_{xy} = \mathrm{T}$;
$\tilde{}\mathrm{T} = \tilde{}\mathrm{F} = \text{人}$; $\tilde{}\text{人} = \mathrm{T}$ та $\tilde{}\Upsilon = \text{人}$.

Розглянемо тепер властивості композиції $\tilde{}$.

Із визначень для кожного $Q \in Pr^{V-A}$ маємо: $F(\neg\tilde{}P) = T(\tilde{}P) = \perp(P) = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}$;
$T(\neg\tilde{}P) = F(\tilde{}P) = \varnothing$; $\perp(\neg\tilde{}P) = \perp(\tilde{}P) = T(P) \cup F(P)$.

Із визначень для кожного $Q \in Pr^{V-A}$ отримуємо:
$T(\tilde{}\exists xP) = \perp(\exists xP)$; $F(\tilde{}\exists xP) = \varnothing$; $\perp(\tilde{}\exists xP) = T(\exists xP) \cup F(\exists xP)$.

Твердження 3. Для кожного $Q \in Pr^{V-A}$ маємо $Q \vee \neg Q \vee \tilde{}Q = \mathrm{T}$.

Наслідок 1. Для кожного $Q \in Pr^{V-A}$ маємо $\neg(Q \vee \neg Q \vee \tilde{}Q) = \mathrm{F}$ та $\tilde{}(Q \vee \neg Q \vee \tilde{}Q) = \text{人}$.

Твердження 4. 1) Для кожного $Q \in PrP^{V-A}$ маємо: $\tilde{}\tilde{}Q = Q \vee \neg Q$.

2) Для кожного $Q \in Pr^{V-A}$ маємо: $\tilde{}\neg Q = \tilde{}Q$; $\tilde{}\tilde{}\tilde{}Q = \tilde{}Q$; $\tilde{}\tilde{}\tilde{}\tilde{}Q = \tilde{}\tilde{}Q$.

Із визначень отримуємо властивість $\mathrm{R}\tilde{}$-дистрибутивності:
$\mathrm{R}\tilde{}$) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\tilde{}P) = \tilde{}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

Розглянемо дію композиції $\tilde{}$ на предикати-індикатори та предикати рівності.

Предикати $\equiv_{xy}$ та Ez є тотальними. Згідно твердження 1 отримуємо: $\tilde{}\equiv_{xy} = \text{人}$; $\tilde{}Ez = \text{人}$.

Твердження 5. Маємо таке подання: $\sim{=}_{xy} = \neg Ex \vee \neg Ey \vee \curlywedge = \neg Ex \vee \neg Ey \vee \sim{\equiv}_{xy}$.

Справді, для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо: $\sim{=}_{xy}(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } {=}_{xy}(d)\uparrow, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } {=}_{xy}(d)\downarrow \end{cases} =$

$= \begin{cases} T, & \text{якщо } \neg Ex(d) \vee \neg Ey(d) = T, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } Ex(d) \,\&\, Ey(d) = T \end{cases} = \neg Ex(d) \vee \neg Ey(d) \vee \curlywedge(d).$

Предикати ${\equiv}_{xy}$ можна подати через предикати ${=}_{xy}$ та Ez.

Теорема 1. Маємо ${\equiv}_{xy} = ({=}_{xy} \,\&\, Ex \,\&\, Ey) \vee (\neg Ex \,\&\, \neg Ey)$.

З іншого боку, наявність $\curlywedge$ та Ez дає змогу подати ${=}_{xy}$ через ${\equiv}_{xy}$.

Теорема 2. Маємо ${=}_{xy} = ({\equiv}_{xy} \,\&\, (\curlywedge \vee Ex) \,\&\, (\curlywedge \vee Ey)) \vee \;\vee (\curlywedge \,\&\, \neg Ex) \vee (\curlywedge \,\&\, \neg Ey)$.

Для ${=}_{xy}$ та ${\equiv}_{xy}$ маємо властивості рефлективності, симетричності, транзитивності.

RfP) Кожний предикат вигляду ${=}_{xx}$ є неспростовним;

кожний предикат вигляду ${\equiv}_{xx}$ є тотожно істинним, тобто ${\equiv}_{xx}$ = T.

SmP) Для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо ${=}_{xy}(d) = {=}_{yx}(d)$ та ${\equiv}_{xy}(d) = {\equiv}_{yx}(d)$.

TrP) Для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо: ${=}_{xy}(d) = T$ та ${=}_{yz}(d) = T \Rightarrow {=}_{xz}(d) = T$;

${\equiv}_{xy}(d) = T$ та ${\equiv}_{yz}(d) = T \Rightarrow {\equiv}_{xz}(d) = T$.

Звідси отримуємо:

Наслідок 2. Кожний предикат вигляду ${=}_{xy} \,\&\, {=}_{yz} \to {=}_{xz}$ неспростовний;

кожний предикат вигляду ${\equiv}_{xy} \,\&\, {\equiv}_{yz} \to {\equiv}_{xz}$ тотожно істинний, тобто ${\equiv}_{xy} \,\&\, {\equiv}_{yz} \to {\equiv}_{xz}$ = T.

Наведемо властивості реномінації предикатів рівності.

RD) Маємо $\mathrm{R}^{\overline{u},x,y}_{\overline{v},z,w}({=}_{xy}) = {=}_{zw}$ та $\mathrm{R}^{\overline{u},x,y}_{\overline{v},z,w}({\equiv}_{xy}) = {\equiv}_{zw}$;

за умови $y \notin \{\overline{u}\}$ маємо $\mathrm{R}^{\overline{u},x}_{\overline{v},z}({=}_{xy}) = {=}_{zy}$ та $\mathrm{R}^{\overline{u},x}_{\overline{v},z}({\equiv}_{xy}) = {\equiv}_{zy}$;

за умови $x, y \notin \{\overline{u}\}$ маємо $\mathrm{R}^{\overline{u}}_{\overline{v}}({=}_{xy}) = {=}_{xy}$ та $\mathrm{R}^{\overline{u}}_{\overline{v}}({\equiv}_{xy}) = {\equiv}_{xy}$.

Для предикатів рівності маємо властивість заміни рівних.

ER) Для кожних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V\!A$ маємо: ${=}_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}^{\overline{u},y}_{\overline{z},x}(P)(d) = \mathrm{R}^{\overline{u},y}_{\overline{z},y}(P)(d)$;

${\equiv}_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}^{\overline{u},y}_{\overline{z},x}(P)(d) = \mathrm{R}^{\overline{u},y}_{\overline{z},y}(P)(d)$.

2. Мови логік з предикатним доповненням та рівністю

Опишемо мови LC з рівністю. Детально розглянемо мову $L^{QC_{\blacksquare}}$.

Алфавіт мови:

– множина V предметних імен (змінних),

– множина Ps предикатних символів (сигнатура мови),

– множина $Cs = \{\neg, \vee, R^{\overline{v}}_{\overline{x}}, \exists x, \sim, {=}_{xy}\}$ символів базових композицій.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул мови:

– кожний $p \in Ps$ та кожний ${\equiv}_{xy}$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

– нехай $\Phi, \Psi \in Fr$; тоді $\neg\Phi \in Fr$, $\vee\Phi\Psi \in Fr$, $R^{\overline{v}}_{\overline{x}}\Phi \in Fr$, $\exists x\Phi \in Fr$, $\sim\Phi \in Fr$

Для мови $L^{QC_{\blacksquare}}$ задамо множину $V_T \subseteq V$ імен, неістотних для всіх $p \in Ps$ – множину тотально неістотних [9] імен. Множину неістотних для $p \in Ps$ імен задамо відображенням $\nu : Ps \to 2^V$, тоді $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$. Для визначення множини гарантовано неістотних для $\Phi \in Fr$ імен таку ν продовжуємо до $\nu : Fr \to 2^V$:

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$; $\qquad \nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi)$;

$\nu(R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Phi) = (\nu(\Phi) \cup \{v_1,\ldots,v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \nu(\Phi),\ i \in \overline{1,n}\}$;

$\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi) \cup \{x\}$; $\qquad \nu(\sim\Phi) = \nu(\Phi)$;

$\nu(\equiv_{xy}) = V \setminus \{x, y\}$.

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, V_T, Cs, Ps)$.

Теорема 3. Якщо $x \in \nu(\Phi)$, то ім'я x неістотне для формули Φ.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ вводимо такі позначення:

– $\sigma(\Gamma)$ – це множина всіх $p \in Ps$, які входять до складу $\Phi \in \Gamma$;

– $nm(\Gamma)$ – це множина всіх $x \in V$, які фігурують у формулах $\Phi \in \Gamma$;

– $\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi \in \Gamma} \nu(\Phi)$, $fu(\Gamma) = V_T \setminus nm(\Gamma)$.

Інтерпретуємо мову $L^{QC\equiv}$ на композиційних системах $CS = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QC\equiv})$.

Задаємо тотальне однозначне $I : Ps \to Pr^{V-A}$, яке продовжимо до відображення інтерпретації формул $I : Fr \to Pr^{V-A}$:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)), \qquad I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)),$$

$$I(R_x^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_x^{\bar{v}}(I(\Phi)), \qquad I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)),$$

$$I(\sim\Phi) = \sim(I(\Phi)), \qquad I(\equiv_{xy}) = \equiv_{xy}.$$

Трійку $\boldsymbol{J} = (CS, \Sigma, I)$ назвемо інтерпретацією мови $L^{QC\equiv}$.

Скорочено інтерпретації мови позначаємо як (A, I).

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Предметне ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_J.

Мова $L^{QC=}$ визначається аналогічно мові $L^{QC\equiv}$, лише замість символів $\equiv_{xy}$ пишемо $=_{xy}$.

Подібним чином описуємо мови логік $L^{RC\equiv}$ та $L^{RC=}$, опускаючи пункти для $\exists x$.

При визначенні мов $L^{Q\equiv}$, $L^{Q=}$, $L^{R\equiv}$, $L^{R=}$ опускаємо пункти, де фігурують символи композиції предикатного доповнення.

Можна виділити загальні класи R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають семантиками, їх позначаємо $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{P}$.

Нехай $\boldsymbol{\alpha}$ – деякий клас інтерпретацій (семантика).

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J} \models \Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна в $\boldsymbol{\alpha}$, що позначаємо ${}^{\alpha}\!\models \Phi$, якщо $\boldsymbol{J} \models \Phi$ при кожній $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi$), якщо $\Phi_J = \mathrm{T}$.

Формула Φ тотожно істинна в $\boldsymbol{\alpha}$ (позн. ${}^{\alpha}\!\models_{id} \Phi$), якщо $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi$ при кожній $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Якщо семантика $\boldsymbol{\alpha}$ зафіксована, то замість ${}^{\alpha}\!\models$, ${}^{\alpha}\!\models_{id}$ пишемо $\models$, $\models_{id}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо предикат Φ_J – виконуваний.

Формула Φ виконувана в $\boldsymbol{\alpha}$, якщо Φ виконувана при деякій $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Твердження 6. $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi \Rightarrow \boldsymbol{J} \models \Phi$; $\models_{id} \Phi \Rightarrow \models \Phi$.

Приклад 1. Маємо ${}^{\alpha}\!\models x = x$ та ${}^{\alpha}\!\models x = y \leftrightarrow y = x$ (тут α – R чи P).

Приклад 2. Маємо ${}^{\alpha}\!\models_{id} x \equiv x$ та ${}^{\alpha}\!\models_{id} x \equiv y \leftrightarrow y \equiv x$ (тут α – R чи P).

Згідно твердження 1 отримуємо:

Твердження 7. Для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо: $(\sim \equiv_{xy})_J = \curlywedge$; $(\sim Ez)_J = \curlywedge$.

Згідно твердження 3 отримуємо:

Твердження 8. Для кожних $\Phi \in Fr$ та інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо

$(\Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\Phi)_J = \mathrm{T}$; $\neg(\Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\Phi)_J = \mathrm{F}$; $\sim(\Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\Phi)_J = \curlywedge$.

Наслідок 3. Для кожної $\Phi \in Fr$ маємо ${}^{\alpha}\!\models_{id} \Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\Phi$ (тут α – R чи P).

Для формалізації фундаментального поняття логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів запропоновано (див. [9]) низку відповідних відношень.

Спочатку задамо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

1) Істиннісний, або T-наслідок ${}_J\models_T$: $\Phi\ {}_J\models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$.

2) Хибнісний, або F-наслідок ${}_J\models_F$: $\Phi\ {}_J\models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$.

3) Сильний, або TF-наслідок ${}_J\models_{TF}$: $\Phi\ {}_J\models_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J\models_T \Psi$ та $\Phi\ {}_J\models_F \Psi$.

4) Неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_J\models_{IR}$: $\Phi\ {}_J\models_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing$.

5) Дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_J\models_{DI}$: $\Phi\ {}_J\models_{DI} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Psi_J) = {}^V\!A$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою:

$\Phi\ {}^{\alpha}\!\models_* \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J\models_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

В загальному випадку логік квазіарних предикатів можна розглядати семантики $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$; при цьому семантики $\boldsymbol{P}$ та $\boldsymbol{T}$ дуальні, семантики $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{TS}$ автодуальні.

В загальному випадку логік квазіарних предикатів зазначені відношення досліджено в [9]. Серед цих відношень маємо лише 5 різних: ${}^P\!\models_{IR}$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$.

Відношення логічного наслідку індукують відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ визначаємо за схемою:

$\Phi \sim_{J*} \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J\models_* \Psi$ та $\Psi\ {}_J\models_* \Phi$.

Відношення логічної еквівалентності ${}^P\!\sim_{IR}$, ${}^P\!\sim_T$, ${}^P\!\sim_F$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^R\!\sim_{TF}$ визначаємо так:

$\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi$, якщо $\Phi\ {}^{\alpha}\!\models_* \Psi$ та $\Psi\ {}^{\alpha}\!\models_* \Phi$.

При цьому: $\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi \Leftrightarrow \Phi \sim_{J*} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Особливе значення має відношення ${}_J\sim_{TF}$. $\Phi \sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ_J та Ψ_J – це один і той же предикат. Це випливає з наступного: $\Phi \sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності. Вона формулюється для відношень ${}^R\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{IR}$. Для ${}^P\!\sim_T$ та ${}^P\!\sim_F$ теорема невірна.

Теорема 4. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi_1, ..., \Phi_n\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi_n$, то $\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Phi'$.

Відношення логічного наслідку поширюються на пари множин формул.

Нехай деяка $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq Fr$, нехай $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Далі позначаємо:

$\bigcap\limits_{\theta \in \Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap\limits_{\theta \in \Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta \in \Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta \in \Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cup}(\Sigma_J)$.

Δ є T-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\models_T \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\models_F \Delta$), якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\models_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J\models_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_J\models_F \Delta$.

Δ є IR-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\models_{IR} \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою:

$\Phi\ {}^{\alpha}\!\models_\tau \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J\models_\tau \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Теорема 5 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim \Psi$, тоді:

$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Тут $\sim$ – одне з ${}^R\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{IR}$; $\models$ – одне з відношень ${}^R\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_{IR}$.

Нагадаємо (див. [9]) основні властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Надалі, якщо інше не зазначене, $\models$ – це одне з ${}^R\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{IR}$.

M) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$ (монотонність).

Декомпозиція формул:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для ${}^P\!\models_{IR}$ також маємо (це невірно для ${}^R\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^P\!\models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^P\!\models_{IR} \Delta, \Phi$.

$\neg_{\mathrm{R}})\ \Gamma\ {}^{P}\!\!\models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^{P}\!\!\models_{IR} \Delta.$

Властивості еквівалентних перетворень, пов'язані з реномінацією, отримуються на основі властивостей R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$. Кожна з них продукує 4 відповідні властивості для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення.

Для першопорядкових логік маємо властивості елімінації кванторів, первісного означення та *E*-розподілу (див. [9]); вони справджуються також для LC та логік з рівністю.

Властивості елімінації кванторів:

$\exists_{\mathrm{L}})\ \exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow\ R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi))$;

$\exists \mathrm{R}_{\mathrm{L}})\ R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow\ R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$;

$\neg\exists_{\mathrm{R}})\ \Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg\, R_z^x(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi))$;

$\neg\exists \mathrm{R}_{\mathrm{R}})\ \Gamma \models \neg\, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Delta \Leftrightarrow\ \Gamma, Ez \models \neg\, R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$;

$\exists \mathrm{v}_{\mathrm{R}})\ \Gamma, Ey \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow\ \Gamma, Ey \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$;

$\exists \mathrm{Rv}_{\mathrm{R}})\ \Gamma, Ey \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow\ \Gamma, Ey \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$;

$\neg\exists \mathrm{v}_{\mathrm{L}})\ \neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow\ \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\exists \mathrm{Rv}_{\mathrm{L}})\ \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow\ \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta.$

Властивості *E*-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow\ \Gamma \models \Delta, Ey$ та $Ey, \Gamma \models \Delta$;

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$, де $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Гарантують (див. [9]) наявність того чи іншого відношення логічного наслідку властивості *C*, *CL*, *CR*, *CLR*. Для усіх відношень маємо:

C) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення такі властивості:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}\!\!\models_{T} \Delta$;

CR) $\Gamma\ {}^{P}\!\!\models_{F} \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}\!\!\models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Властивості *C*, *CL*, *CR*, *CLR* справджуються для логік з рівністю.

Зауважимо, що відношення, які ми позначаємо одним символом (напр., ${}^{P}\!\!\models_{T}$), *різні* в LC та в логіках з рівністю, але з контексту буде зрозуміло, про яке відношення йде мова.

3. Особливості відношень логічного наслідку в логіках з рівністю

Розглянемо особливості відношень логічного наслідку, пов'язані з наявністю предикатів рівності. Опишемо властивості, пов'язані з предикатами слабкої рівності.

На основі Sm маємо властивості:

$\mathrm{Sm}_{\mathrm{L}})\ x = y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x = y, y = x, \Gamma \models \Delta$;

$\mathrm{Sm}_{\mathrm{R}})\ \Gamma \models \Delta, \neg x = y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg x = y, \neg y = x$.

Tr індукує властивості:

$\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}})\ x = y, y = z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = y, y = z, x = z, \Gamma \models \Delta$ (тут $\models$ – це ${}^{P}\!\!\models_{IR}$ чи ${}^{P}\!\!\models_{T}$);

$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}})\ \Gamma \models \Delta, \neg x = y, \neg y = z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg x = y, \neg y = z, \neg x = z$ (тут $\models$ – це ${}^{P}\!\!\models_{IR}$ чи ${}^{P}\!\!\models_{F}$).

Справді, $T(x = y) \cap T(y = z) = T(x = y) \cap T(y = z) \cap T(x = z)$.

Теорема 6. Tr_{L} невірна для $\models_{F}$; Tr_{R} невірна для $\models_{T}$.

Для $d = [x \mapsto a, z \mapsto b]$ маємо $d \notin F(x = y) \cup F(y = z) = F(x = y \,\&\, y = z)$; проте $d \in F(x = z)$, тому $d \in F(x = z) \cup F(x = y) \cup F(y = z) = F(x = y \,\&\, y = z \,\&\, x = z) \Rightarrow x = y \,\&\, y = z\ {}^{P}\!\!\models_{F} x = y \,\&\, y = z \,\&\, x = z$. Проте $\Phi\ {}^{P}\!\!\models_{F} \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}^{P}\!\!\models_{T} \neg\Phi$, тому $\neg x = y \vee \neg y = z \vee \neg x = z\ {}^{P}\!\!\models_{T} \neg x = y \vee \neg y = z$. Водночас $x = y \,\&\, y = z\ {}^{P}\!\!\models_{T} x = y \,\&\, y = z \,\&\, x = z$, $\neg x = y \vee \neg y = z \vee \neg x = z\ {}^{P}\!\!\models_{F} \neg x = y \vee \neg y = z$.

Таким чином, транзитивність слабкої рівності порушується для відношень ${}^{P}|\!=_{F}$ та ${}^{P}|\!=_{T}$, тому й для ${}^{P}|\!=_{TF}$ та ${}^{R}|\!=_{TF}$. Тому в КНЛ з $=_{xy}$ ці відношення некоректні.

Наслідок 4. Для КНЛ з $=_{xy}$ коректним залишається лише відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$.

Властивість RD індукує властивості реномінації рівності для відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$.

RD$_{\mathrm{L}}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x=y),\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta \Leftrightarrow x=y,\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta$ за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$;

$R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x=y),\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta \Leftrightarrow z=y,\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta$ за умови $y\notin\{\bar{u}\}$;

$R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x=y),\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta \Leftrightarrow z=u,\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta$.

RD$_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x=y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta, x=y$ за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$;

$\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x=y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta, z=y$ за умови $y\notin\{\bar{u}\}$;

$\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x=y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta, z=u$.

Властивість ER індукує властивості заміни рівних для відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$:

ER$_{\mathrm{L}}$) $x=y,R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta \Leftrightarrow x=y,R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(\Phi),\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR}\Delta$;

ER$_{\mathrm{R}}$) $x=y,\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),\Delta \Leftrightarrow x=y,\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(\Phi),\Delta$.

Властивість Rf індукує спеціальну умову наявності відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$:

$C_{\mathrm{Rf}=}$) $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} x=x,\Delta$.

Опишемо властивості КНЛ, пов'язані з предикатами строгої рівності.

Далі $|\!=$ – це одне з ${}^{R}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{IR}$.

Для відношень типу T, F, TF знімати заперечення, переносячи $\neg\Phi$ з лівої частини відношення у праву як Φ і навпаки, взагалі кажучи, не можна. Проте це можна робити для предикатів строгої рівності:

E$_{\mathrm{LR}}$) $\Gamma|\!=\neg x\equiv y,\Delta \Leftrightarrow x\equiv y,\Gamma|\!=\Delta$ та $\neg x\equiv y,\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow \Gamma|\!=x\equiv y,\Delta$;

ER$_{\mathrm{LR}}$) $\Gamma|\!=\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x\equiv y),\Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x\equiv y),\Gamma|\!=\Delta$ та $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x\equiv y),\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow \Gamma|\!=R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x\equiv y),\Delta$.

Властивості, індуковані Sm та Tr:

SmS) $x\equiv y,\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow x\equiv y,y\equiv x,\Gamma|\!=\Delta$;

TrS) $x=y,y=z,\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow x=y,y=z,x=z,\Gamma|\!=\Delta$.

Властивість RD індукує властивості реномінації рівності.

RDS$_{\mathrm{L}}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x\equiv y),\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow x\equiv y,\Gamma|\!=\Delta$ за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$;

$R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x\equiv y),\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow z\equiv y,\Gamma|\!=\Delta$ за умови $y\notin\{\bar{u}\}$;

$R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x\equiv y),\Gamma|\!=\Delta \Leftrightarrow z\equiv u,\Gamma|\!=\Delta$;

RDS$_{\mathrm{R}}$) $\Gamma|\!=R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x\equiv y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma|\!=x\equiv y,\Delta$ за умови $x,y\notin\{\bar{u}\}$;

$\Gamma|\!=R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x\equiv y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma|\!=z\equiv y,\Delta$ за умови $y\notin\{\bar{u}\}$;

$\Gamma|\!=R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x\equiv y),\Delta \Leftrightarrow \Gamma|\!=z\equiv u,\Delta$.

Властивість ER індукує такі властивості заміни рівних:

ERS$_{\mathrm{L}}$) $\Gamma,x\equiv y,R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi)|\!=\Delta \Leftrightarrow \Gamma,x\equiv y,R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(\Phi)|\!=\Delta$;

ERS$_{\mathrm{R}}$) $\Gamma,x\equiv y|\!=R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),\Delta \Leftrightarrow \Gamma,x\equiv y|\!=R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(\Phi),R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(\Phi),\Delta$.

Властивість Rf індукує умову наявності кожного з ${}^{R}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{IR}$:

C_{Rf}) $\Gamma|\!=x\equiv x,\Delta$.

Підсумовуючи, в КНЛ з $=_{xy}$ маємо такі властивості відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$:

– декомпозиції $\neg_{\mathrm{L}}$, $\neg_{\mathrm{R}}$, $\vee_{\mathrm{L}}$, $\vee_{\mathrm{R}}$;

– еквівалентних перетворень на основі R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$;

– елімінації кванторів $\exists_{\mathrm{L}}$, $\exists\mathrm{R}_{\mathrm{L}}$, $\exists\mathrm{v}_{\mathrm{R}}$, $\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{R}}$;

– E-розподілу Ed та первісного означення Ev;
– пов'язані з предикатами слабкої рівності Sm_L, Tr_L, RD_L, RD_R, ER_L, ER_R;
– властивості C та $C_{Rf=}$ гарантованої наявності відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$.

Подібні властивості відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$ маємо в КНЛ з $\equiv_{xy}$; відмінність тільки в заміні символів $=_{xy}$ на символи $\equiv_{xy}$, що дає такі властивості:
– пов'язані з предикатами строгої рівності SmS, TrS, RDS_L, RDS_R, ERS_L, ERS_R;
– властивості C та C_{Rf} гарантованої наявності відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$.

Властивості відношень ${}^{R}|{=}_{TF}$, ${}^{P}|{=}_{TF}$, ${}^{P}|{=}_{T}$, ${}^{P}|{=}_{F}$ в LEs:
– декомпозиції формул $\neg\neg_L$, $\neg\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, $\neg\vee_L$, $\neg\vee_R$;
– еквівалентних перетворень на основі R, RI, RU, RR, $R\neg$, $R\vee$;
– елімінації кванторів $\exists_L$, $\exists R_L$, $\neg\exists_R$, $\neg\exists R_R$, $\exists\vee_R$, $\exists R\vee_R$, $\neg\exists\vee_L$, $\neg\exists R\vee_L$;
– E-розподілу і первісного означення;
– пов'язані з $\equiv_{xy}$ властивості E_{LR}, ER_{LR}, SmS, TrS, RDS_L, RDS_R, ERS_L, ERS_R;

Також властивості гарантованої наявності логічного наслідку:
– C, CL, C_{Rf} для ${}^{P}|{=}_{T}$;
– C, CR, C_{Rf} для ${}^{P}|{=}_{F}$;
– C, CLR, C_{Rf} для ${}^{P}|{=}_{TF}$;
– C, C_{Rf} для ${}^{R}|{=}_{TF}$.

В LC відношення логічного наслідку вводимо так, як описано вище. Проте композиція предикатного доповнення має специфічні особливості, що відображається на властивостях відношень логічного наслідку. Змістовними в LC є лише R-семантика та P-семантика.

Для відношення ${}^{R}|{=}_{IR}$ рефлексивність порушується як в традиційних логіках квазіарних предикатів, так і в КНЛ з рівністю та в LC. Справді, для довільного $p \in Ps$ маємо $p\,{}^{Rc}|{\neq}_{IR}\,p$ (беремо $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R}$ таку, що $p_J = \Upsilon$). Тому вироджене відношення ${}^{R}|{=}_{IR}$ далі не розглядаємо.

Для КНЛ з$=_{xy}$ відношення типів T, F, TF для пар формул нетранзитивні (теорема 6). Тому для LC= коректним може бути лише відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$.

Відношення логічного наслідку в LC детально досліджено в [7]. Зокрема, показано, що відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$ в LC коректно ввести неможливо. Причиною цього є неможливість коректно задати умови декомпозиції формул вигляду ${}^{\sim}\Phi$. Зумовлено це тим, що декомпозиція ${}^{\sim}\Phi$ вимагає подання області невизначеності формули Φ через її області істинності та хибності за допомогою лише $\cap$ та $\cup$. Як показано в [7], це неможливо.

Таким чином, для LC відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$ неадекватне. Тому від ${}^{P}|{=}_{IR}$ доцільно перейти до загальнішого відношення $|{=}_{IR}{}^{\perp}$ неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. Відношення $|{=}_{IR}{}^{\perp}$ в LC досліджено в [5–7].

Неадекватність відношення ${}^{P}|{=}_{IR}$ в LC робить його і неадекватним і в LC= та в LC≡. Враховуючи, що в LC= відношення типів T, F, TF теж неадекватні, LC= до певної міри вироджена, для неї може працювати лише відношення $|{=}_{IR}{}^{\perp}$.

Стисло опишемо відношення типів T та F в LC та LC≡. Це відношення ${}^{P}|{=}_{T}$ і ${}^{R}|{=}_{T}$, які також будемо позначати $|{=}_{T}$, та відношення ${}^{P}|{=}_{F}$ і ${}^{R}|{=}_{F}$, які також позначатимемо $|{=}_{F}$.

Для цих відношень в LC та в LC≡ справджуються відповідні властивості декомпозиції формул, еквівалентних перетворень, елімінації кванторів, E-розподілу та первісного означення, які мають місце для традиційних КНЛ (див. [9]). Справджуються також умови, які гарантують наявність того чи іншого відношення логічного наслідку. Водночас в LC та в LC≡ з'являються (див. [7]) нові властивості, пов'язані з композицією предикатного доповнення.

Для відношень $|{=}_{T}$ додатково маємо наступні властивості.

Умова гарантованої наявності $|{=}_{T}$:

$C\neg^{\sim})\ \neg{}^{\sim}\Phi, \Gamma |{=}_{T} \Delta.$

Декомпозиція формул типу ${}^{\sim}\Phi$:

$\sim_{\mathrm{LT}}$) $\sim\Phi, \Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$.

$\sim_{\mathrm{RT}}$) $\Gamma \models_T \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$.

$\neg\sim_{\mathrm{El}}$) $\Gamma \models_T \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$.

Властивість $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ – це фактично елімінація $\sim$.

Для відношень $\models_F$ додатково маємо наступні властивості.

Умова гарантованої наявності $\models_F$:

$C\sim$) $\Gamma \models_F \sim\Phi, \Delta$.

Декомпозиція формул типу $\sim\Phi$:

$\neg\sim_{\mathrm{RF}}$) $\Gamma \models_F \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma, \Phi, \neg\Phi \models_F \Delta$.

$\neg\sim_{\mathrm{LF}}$) $\neg\sim\Phi, \Gamma \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta, \Phi$ та $\Gamma \models_F \Delta, \neg\Phi$.

$\sim_{\mathrm{El}}$) $\sim\Phi, \Gamma \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta$.

Властивість $\sim_{\mathrm{El}}$ – це фактично елімінація $\sim$.

Як випливає з цих співвідношень, для відношень типу $\models_T$ та типу $\models_F$ маємо *різні* властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$, їх *не можна* подати як спільну властивість для відношень типу $\models_{TF}$. Це означає, що в LC та в LC≡ відношення ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^R\!\models_{TF}$ *різні*, водночас в традиційній логіці квазіарних предикатів маємо ${}^R\!\models_T = {}^R\!\models_F = {}^R\!\models_{TF}$.

Властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$ для відношень типу $\models_{TF}$ отримуємо, поєднуючи наведені вище відповідні властивості для $\models_T$ та $\models_F$: $\sim_{\mathrm{LT}}$ та $\sim_{\mathrm{El}}$, $\sim_{\mathrm{RT}}$ та $C\sim$, $C\neg\sim$ та $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$, $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ та $\neg\sim_{\mathrm{RF}}$:

$\sim_{\mathrm{LTF}}$) $\sim\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Gamma \models_F \Delta$;

$\sim_{\mathrm{RTF}}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$;

$\neg\sim_{\mathrm{LTF}}$) $\neg\sim\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta, \Phi$ та $\Gamma \models_F \Delta, \neg\Phi$;

$\neg\sim_{\mathrm{RTF}}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma, \Phi, \neg\Phi \models_F \Delta$.

Звідси випливає, що в LC≡ усі відношення ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^R\!\models_{TF}$ є різними.

В LC≡ також виконуються наведені вище властивості, пов'язані з предикатами строгої рівності. Новими є відношення, які пов'язують $\sim$ та предикати строгої рівності.

Згідно твердження 7 $\sim\!\equiv_{xy\,J} = \curlywedge$ для кожної $\boldsymbol{J}$, звідки $T(\sim\!\equiv_{xy\,J}) = F(\sim\!\equiv_{xy\,J}) = \varnothing$.

Звідси умови гарантованої наявності $\models_T$ та гарантованої наявності $\models_F$:

$C_{\sim\equiv\mathrm{L}}$) $\sim x \equiv y, \Gamma \models_T \Delta$;

$C_{\sim\equiv\mathrm{R}}$) $\Gamma \models_F \Delta, \sim x \equiv y$.

При взаємній заміні $\models_T$ та $\models_F$ маємо властивості спрощення – елімінації $\sim\!\equiv_{xy}$:

$\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{L}}$) $\sim x \equiv y, \Gamma \models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_F \Delta$;

$\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{R}}$) $\Gamma \models_T \Delta, \sim x \equiv y \Leftrightarrow \Gamma \models_T \Delta$.

Підсумовуючи, в LC≡ маємо такі властивості відношень ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$.

Спільні для ${}^R\!\models_T$, ${}^R\!\models_F$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$ властивості:

– декомпозиції формул $\neg\neg_{\mathrm{L}}$, $\neg\neg_{\mathrm{R}}$, $\vee_{\mathrm{L}}$, $\vee_{\mathrm{R}}$, $\neg\vee_{\mathrm{L}}$, $\neg\vee_{\mathrm{R}}$;

– еквівалентних перетворень на основі R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\sim$;

– елімінації кванторів $\exists_{\mathrm{L}}$, $\exists\mathrm{R}_{\mathrm{L}}$, $\neg\exists_{\mathrm{R}}$, $\neg\exists\mathrm{R}_{\mathrm{R}}$, $\exists\mathrm{v}_{\mathrm{R}}$, $\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{R}}$, $\neg\exists\mathrm{v}_{\mathrm{L}}$, $\neg\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{L}}$;

– пов'язані з $\equiv_{xy}$ властивості E_{LR}, $\mathrm{ER}_{\mathrm{LR}}$, SmS, TrS, $\mathrm{RDS}_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{RDS}_{\mathrm{R}}$, $\mathrm{ERS}_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{ERS}_{\mathrm{R}}$.

Для відношень $\models_T$ додатково маємо:

– властивості $\sim_{\mathrm{LT}}$, $\sim_{\mathrm{RT}}$, $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$;

– властивість $\mathrm{El}_{\sim\equiv\mathrm{R}}$ елімінації $\sim\!\equiv_{xy}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^P\!\models_T$: C, CL, C_{Rf}, $C\neg\sim$, $C_{\sim\equiv\mathrm{L}}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^R\!\models_T$: C, C_{Rf}, $C\neg\sim$, $C_{\sim\equiv\mathrm{L}}$.

Для відношень $\models_F$ додатково маємо:

– властивості $\neg\sim_{RF}$, $\neg\sim_{LF}$, $\sim_{El}$ декомпозиції формул типу $\sim\Phi$;

– властивість $El_{\sim=L}$ елімінації $\sim\equiv_{xy}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^{P}|\!=_{F}$: C, CR, C_{Rf}, $C^{\sim}$, $C_{\sim=R}$.

Властивості гарантованої наявності відношення ${}^{R}|\!=_{F}$: C, C_{Rf}, $C^{\sim}$, $C_{\sim=R}$.

Такі ж властивості відношень ${}^{R}|\!=_{T}$, ${}^{R}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$ маємо в LC, але при цьому опускаємо властивості, в яких фігурують символи предикатів строгої рівності.

Висновки

В роботі досліджено нові програмно-орієнтовані логічні формалізми – композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності та композицією предикатного доповнення. Такі логіки з предикатами слабкої рівності названо LC=, а з предикатами строгої рівності – LC≡. Розглянуто композиційні алгебри LC= та LC≡, досліджено властивості їх композицій, описано першопорядкові мови цих логік. Основну увагу зосереджено на вивченні властивостей, пов'язаних з предикатами рівності та композицією предикатного доповнення. Введено та досліджено низку відношень логічного наслідку в першопорядкових LC= та LC≡, розглянуто їх особливості. Зокрема, встановлено певну виродженість LC=, для якої коректним є лише відношення неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. Властивості відношень логічного наслідку є семантичною основою побудови в LC≡ відповідних першопорядкових числень секвенційного типу, що планується здійснити в наступних роботах.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993–2000.
2. Hoare C. An axiomatic basis for computer programming, Comm. ACM. 1969. 12(10). P. 576–580.
3. Apt K. Ten years of Hoare's logic: a survey – part I. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.* 1981. 3(4). P.431–483
4. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement, Comm. in Computer and Information Science. 2019. Vol 1007. Springer, Cham. P. 71–88.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С., Мамедов Т.А. Пропозиційні логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування.* 2019. № 1. С. 3–13.
6. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak. Program Logics of Renominative Level with the Composition of Predicate Complement, *in* Proceedings of the 15th International Conference on ICT. CEUR Workshop, vol. 2393, pp. 603–616 (2019).
7. Шкільняк О.С. Відношення логічного наслідку в логіках часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування*. 2019. № 3, С. 11–27.
8. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові квазіарні логіки з предикатами рівності. *Проблеми програмування.* 2017. № 2. С. 3–23.
9. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.

Шкільняк Оксана Степанівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: me.oksana@ gmail.com

ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІКАХ З ПРЕДИКАТНИМ ДОПОВНЕННЯМ

Шкільняк О.С.

We study software-oriented logics of partial predicates with new special non-monotonic operation ~ of the predicate complement. We denote these logics by LC. Such operations are used in various versions of the Floyd-Hoare program logic with partial pre- and post-conditions. We describe first order composition algebras and LC languages. For LC, a number of logical consequence relations and logical consequence relations under the conditions of undefinedness are specified. Properties of the defined relations are investigated, differences and the relationship between them are given. For the introduced relations, we describe the conditions for their guaranteed presence, the decomposition conditions for formulas and the properties of quantifier elimination. The theorem of elimination of the conditions of undefinedness for the relations $|=_T^{\perp}$ and $|=_F^{\perp}$ is proved.

Keywords: logic, predicate, composition algebra, logical consequence.

Ключові слова: логіка, предикат, композиційна алгебра, логічний наслідок.

Розширення сфери їх застосування інформаційних технологій виводить на перший план задачу створення ефективних і надійних і програмних систем. Це яскраво засвідчують недавні жахливі авіакатастрофи з літаками Boeing 737 MAX 8. В основі сучасних програмних систем лежить апарат математичної логіки (див., напр., [1]). Зазвичай це класична логіка [2] предикатів та базовані на ній спеціальні логіки. Водночас класична логіка має [3] низку принципових обмежень, що ускладнює її використання. Тому особливої актуальності набуває проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових квазіарних предикатів (див., напр., [3–5]), будовані на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу.

Важливим різновидом програмно-орієнтованих логік, які успішно застосовуються в системах верифікації програм, є логіки Флойда-Хоара [6]. Ці логіки використовують тотальні перед- та після-умови (предикати), тому видається доцільним розширити такі логіки на випадок часткових предикатів. Продуктивним напрямком такого розширення є введення [7] спеціальної операції (композиції) предикатного доповнення. КНЛ часткових предикатів з композицією предикатного доповнення запропоновано в [8], їх названо LC. Дослідженню пропозиційних LC присвячена робота [8], LC реномінативного рівня описано в [9].

Метою даної роботи є вивчення семантичних властивостей першопорядкових LC. Описано композиційні алгебри та мови LC. Запропоновано низку відношень логічного наслідку в LC та відношень логічного наслідку за умови невизначеності. Досліджено властивості цих відношень, встановлено співвідношення між цими. Для відношень типів $|=_T$ та $|=_F$ доведено теорему про елімінацію умов невизначеності, водночас для відношень типу $|=_{IR}$ це зробити неможливо. Для пропонованих відношень описано умови їх гарантованої наявності, наведено властивості декомпозиції формул та елімінації кванторів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [3, 4].

1. Композиційні системи та мови логік з предикатним доповненням

Під V-A-квазіарним предикатом розуміємо часткову неоднозначну функцію вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^{V}A$ – множина всіх V-A-іменних множин. В цій роботі ми розглядаємо неоднозначні (недетерміновані) предикати реляційного типу, або R-предикати. Множину всіх значень, які неоднозначний предикат P може приймати на аргументі (даному) $d \in {}^{V}A$, позначаємо $P[d]$.

Кожний R-предикат Q можна однозначно задати за допомогою 2-х множин:

– область істинності $T(Q) = \{d \mid T \in Q[d]\}$;

– область хибності $F(Q) = \{d \mid F \in Q[d]\}$.

Область невизначеності R-предиката Q визначається через $T(Q)$ та $F(Q)$ так:

$$\perp(Q) = \overline{T(Q) \cup F(Q)} = \overline{T(Q)} \cap \overline{F(Q)}.$$

V-A-квазіарний R-предикат Q:

– частковий однозначний або P-предикат, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$;

– тотальний, або T-предикат, якщо $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}A$; тоді $\perp(Q) = \varnothing$.

Для P-предикатів пишемо $Q(d)\downarrow$, якщо значення $Q(d)$ визначене, та пишемо $Q(d)\uparrow$, якщо значення $Q(d)$ невизначене. Тому для P-предикатів маємо

$$T(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = T\},\ \ F(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = F\},\ \ \perp(Q) = \{d \mid Q(d)\uparrow\}.$$

Класи V-A-квазіарних R-предикатів та P-предикатів позначимо $Pr^{V\text{–}A}$ та $PrP^{V\text{–}A}$.

Маємо 4 константних R-предикати T, F, ⅄, ϒ:

$$T(\mathrm{T}) = F(\mathrm{F}) = {}^{V}A,\ \ T(\mathrm{F}) = F(\mathrm{T}) = \varnothing,\ \ T(⅄) = F(⅄) = \varnothing,\ \ T(\Upsilon) = F(\Upsilon) = {}^{V}A.$$

Опишемо композиції R-предикатів. Композиції пропозиційного рівня традиційно названо логічними зв'язками. За *базові* логічні зв'язки візьмемо $\neg$ та $\vee$, вони задаються так:

$$T(\neg P) = F(P);\ \ F(\neg P) = T(P);$$
$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q);\ \ F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q).$$

Композиції $\to$, & є *похідними*, вони виражаються через базові композиції $\neg$, $\vee$:

$$P \& Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);\ \ P \to Q = \neg P \vee Q.$$

Для R-предикатів маємо $\perp(\neg Q) = \perp(Q)$; $\perp(P \vee Q) = (\perp(P) \cap \overline{T(Q)}) \cup (\perp(Q) \cap \overline{T(P)})$.

1-арна композиція $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ реномінації R-предикатів задається умовою $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)[d] = P[\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)]$.

Тут $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ – операція реномінації на V-A-іменних множинах [3, 4].

Визначальними для першопорядкових логік є 1-арні композиції *квантифікації*. $\exists x$ та $\forall x$ За базову візьмемо $\exists x$, задамо її так:

$$T(\exists xP) = \bigcup_{a \in A} \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in T(P)\};\ \ F(\exists xP) = \bigcap_{a \in A} \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P)\}.$$

Тоді $\perp(\exists xP) = \overline{T(\exists xP)} \cap \overline{F(\exists xP)} = \bigcap_{a \in A} \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in F(P) \cup \perp(P)\} \cap \bigcup_{a \in A} \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in \perp(P)\}$.

Зокрема, для P-предикатів $\perp(\exists xQ) = \bigcap_{a \in A} \{d \mid Q(d\nabla x \mapsto a) \neq T\} \cap \bigcup_{a \in A} \{d \mid d\nabla x \mapsto a \in \perp(P)\}$.

Тому для P-предикатів $\exists xQ(d)\uparrow \Leftrightarrow Q(d\nabla x \mapsto b)\uparrow$ для деякого $b \in A$ та неможливо $\exists xQ(d) = T$.

Композиція $\forall x$ є *похідною*: $\forall xP = \neg\exists x\neg P$.

Характерна особливість LC – наявність спеціальної немонотонної 1-арної композиції предикатного доповнення $\sim$. Композицію $\sim$ можна задати так:

$$T(\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P) \cup F(P)} = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)},\ \ \ F(\sim P) = \varnothing.$$

Тоді маємо $\perp(\sim P) = T(P) \cup F(P)$.

Для P-предикатів $\sim$ можна задати так: $(\sim Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Q(d)\uparrow, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } Q(d)\downarrow. \end{cases}$

Класи P-предикатів та R-предикатів замкнені щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists xQ$, $\sim$; тому ці класи замкнені щодо похідних композицій $\to$, &, $\forall xP$.

Водночас $\sim Q$ є P-предикатом для довільного $Q \in Pr^{V-A}$, тому клас T-предикатів незамкнений щодо $\sim$. Отже, для T-предикатів LC не мають смислу.

Таким чином, далі озглядаємо загальний клас LC – логіки R-предикатів з композицією $\sim$, та їх підклас LCP – LC P-предикатів.

LC пропозиційного, реномінативного, чистого першопорядкового рівнів називаємо PLC, RLC, QLC. LC P-предикатів відповідних рівнів називаємо PLCP, RLCP, QLCP.

Множини базових композицій PLC, RLC, QLC – це відповідно множини

$$C_{PLC} = \{\neg, \vee, \sim\}; \; C_{RLC} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \sim\}; \; C_{QLC} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \sim, \exists x\}.$$

Маємо такі композиційні системи в логіках PLC, RLC, QLC:

$$({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{PLC}); \; ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{RLC}); \; ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QLC}).$$

Відповідно отримуємо композиційні лгебри R-предикатів в логіках PLC, RLC, QLC:

$$A^{PLC} = (Pr^{V-A}, C_{PLC}); \; A^{RLC} = (Pr^{V-A}, C_{RLC}); \; A^{QLC} = (Pr^{V-A}, C_{QLC}).$$

Клас P-предикатів замкнений щодо $\sim$, тому в A^{PLC}, A^{RLC}, A^{QLC} можна виділити підалгебри A^{PLCP}, A^{RLCP}, A^{QLCP} з носієм PrP^{V-A}.

Наведемо основні властивості композицій LC. Не пов'язані з $\sim$ властивості пропозиційних композицій, композицій реномінації та квантифікації в LC аналогічні властивостям цих композицій у традиційних логіках квазіарних предикатів (див [3–5]).

На пропозиційному рівні властивості композиції $\sim$ описано в [8]. Зокрема:

$$\sim\neg P = \sim P; \; \sim\sim\sim P = \sim P; \; \sim\sim\sim\sim P = \sim\sim P.$$

Для P-предикатів додатково маємо $\sim\sim Q = Q \vee \neg Q$.

Маємо $F(\neg\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}$; $T(\neg\sim P) = \varnothing$; $\perp(\neg\sim P) = \perp(\sim P) = T(P) \cup F(P)$.

Звідси $T(\sim\exists xP) = \perp(\exists xP)$; $F(\sim\exists xP) = \varnothing$; $\perp(\sim\exists xP) = T(\exists xP) \cup F(\exists xP)$.

Властивість $\mathrm{R}\sim$-дистрибутивності:

$\mathrm{R}\sim)$ $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P) = \sim \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

Дія $\sim$ на константні предикати така: $\sim(\curlywedge) = \mathrm{T}$; $\sim(\mathrm{T}) = \sim(\mathrm{F}) = \sim(\curlyvee) = \curlywedge$.

Опишемо мову QLC – чистих першопорядкових LC. Алфавіт мови:

– множина V предметних імен (змінних);

– множина Ps предикатних символів (сигнатура мови);

– множина $C_{QLC} = \{\neg, \vee, \sim, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ символів базових композицій.

Задамо множину Fr формул мови. Маємо $Ps \subseteq Fr$, далі задаємо індуктивно:

$$\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, \sim\Phi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr.$$

Розширена сигнатура мови– це $\Sigma = (V, V_T, C_{QLC}, Ps)$.

Тут $V_T \subseteq V$ – множина тотально неістотних імен. Множину неістотних для $p \in Ps$ імен задамо відображенням $\nu : Ps \to 2^V$, тоді $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$. Для визначення множини гарантовано неістотних для $\Phi \in Fr$ імен таку ν продовжуємо [4] до $\nu : Fr \to 2^V$; при цьому $\nu(\sim\Phi) = \nu(\Phi)$.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ позначимо $\sigma(\Gamma)$ множину всіх $p \in Ps$, які входять до складу $\Phi \in \Gamma$; позначимо $nm(\Gamma)$ множину всіх $x \in V$, які фігурують у формулах $\Phi \in \Gamma$. Тоді $fu(\Gamma) = V_T \setminus nm(\Gamma)$.

Інтерпретуємо мову на композиційних системах $\mathrm{CS} = ({}^{V}A, Pr^{V-A}, C_{QLC})$. Для цього задамо тотальне однозначне відображення $I : Ps \to Pr^{V-A}$, яке продовжимо до $I : Fr \to Pr^{V-A}$:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)); \; I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)); \; I(\sim\Phi) = \sim(I(\Phi));$$

$$I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi)); \; I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)).$$

Інтерпретація мови сигнатури Σ – це $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$; скорочено інтерпретації позначаємо (A, I). Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ позначимо Φ_J.

Подібним чином, опускаючи пункти для $\exists x$, описуємо мову RLC. При описі мови PLC

опускаємо пункти для $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists x$, а також поняття, пов'язані з неістотністю імен.

Виділення класів предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій, які називають [3, 4] семантиками. Зокрема, це *R*-семантика, *P*-семантика, *T*-семантика.

Клас *T*-предикатів незамкнений щодо $\sim$, тому для LC *T*-семантика *малозмістовна*. Змістовними для LC є *R*-семантика та *P*-семантика, їх позначаємо $\boldsymbol{R_C}$ та $\boldsymbol{P_C}$.

Фіксуючи рівень розгляду, отримуємо семантики $\boldsymbol{R_{PC}}$ та $\boldsymbol{P_{PC}}$, $\boldsymbol{R_{RC}}$ та $\boldsymbol{P_{RC}}$, $\boldsymbol{R_{QC}}$ та $\boldsymbol{P_{QC}}$.

Властивості композицій LC можна подати із використанням формул мови.

Наведемо для прикладу основні властивості, пов'язані з реномінацією.

R) $R(\Phi)_J = \Phi_J$;

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$;

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$, де $z \in \nu(\Phi)$;

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_J = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$;

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_J$;

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)_J$;

R$\sim$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi)_J = \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$

Ren) $\exists y(\Phi)_J = \exists z \; R_z^y(\Phi)_J$, де $z \in \nu(\Phi)$;

R∃s) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_J = \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$, де $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

R∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_J = \exists z \; R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)_J$, де $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$.

2. Відношення логічного наслідку в LC

На множинах формул мови LC можна визначити низку відношень логічного наслідку. Зокрема, на мову LC природним чином поширимо відомі [4] відношення ${}^{P}\!\models_{IR}$, ${}^{P}\!\models_{T}$, ${}^{P}\!\models_{F}$, ${}^{P}\!\models_{TF}$, ${}^{R}\!\models_{TF}$. Такі відношення в LC будемо позначати ${}^{Pc}\!\models_{IR}$, ${}^{Pc}\!\models_{T}$, ${}^{Pc}\!\models_{F}$, ${}^{Pc}\!\models_{TF}$, ${}^{Rc}\!\models_{T}$, ${}^{Rc}\!\models_{F}$, ${}^{Rc}\!\models_{TF}$. При цьому істотні особливості вносить нова композиція предикатного доповнення.

Нехай деяка $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq Fr$, нехай $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Далі позначаємо:

$\bigcap_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cap}(\Sigma_J)$,

$\bigcup_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cup}(\Sigma_J)$.

У випадку $\Sigma = \varnothing$ маємо: $T^{\cup}(\Sigma_J) = F^{\cup}(\Sigma_J) = \perp^{\cup}(\Sigma_J) = \varnothing$, $T^{\cap}(\Sigma_J) = F^{\cap}(\Sigma_J) = \perp^{\cap}(\Sigma_J) = {}^{V}\!A$.

Δ є *T*-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma_J \models_T \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Δ є *F*-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma_J \models_F \Delta$), якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Δ є *TF*-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma_J \models_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma_J \models_T \Delta$ та $\Gamma_J \models_F \Delta$.

Δ є *IR*-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma_J \models_{IR} \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою:

$$\Phi \; {}^{\alpha}\!\models_{\tau} \Psi, \text{ якщо } \Phi_J \models_{\tau} \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}.$$

Твердження 1. Нехай формули в Γ та Δ не мають входжень $\sim$, тоді $\Gamma \; {}^{Rc}\!\models_{IR} \Delta$.

Візьмемо $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$ таку, що $\vartheta_J = \Upsilon$ для всіх $\vartheta \in \sigma(\Gamma \cup \Delta)$, тоді $\Gamma_J \not\models_{IR} \Delta$, звідки $\Gamma \; {}^{Rc}\!\models_{IR} \Delta$.

Зокрема, звідси отримуємо парадоксальне $\vartheta \; {}^{Rc}\!\models_{IR} \vartheta$ для кожного $\vartheta \in Ps$.

Для всіх $\Phi \in Fr$ та $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$ маємо $F(\sim\Phi_J) = T(\neg\sim\Phi_J) = \varnothing$. Звідси:

Приклад 1. Маємо $\Gamma \; {}^{Rc}\!\models_{F} \sim\Phi$, $\neg\sim\Phi \; {}^{Rc}\!\models_{T} \Delta$, $\Gamma \; {}^{Rc}\!\models_{IR} \sim\Phi$, $\neg\sim\Phi \; {}^{Rc}\!\models_{IR} \Delta$.

Для всіх $\Phi \in Fr$, $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$ маємо $T(\Phi_J) \not\subset T(\sim\Phi_J) = \perp(\Phi_J)$, $F(\Phi_J) \not\subset F(\neg\sim\Phi_J) = \perp(\Phi_J)$. Тому

Приклад 2. Маємо $\Phi \; {}^{Pc}\!\not\models_{T} \sim\Phi$ та $\neg\sim\Phi \; {}^{Pc}\!\not\models_{F} \Phi$, тому й $\Phi \; {}^{Rc}\!\not\models_{T} \sim\Phi$ та $\neg\sim\Phi \; {}^{Rc}\!\not\models_{F} \Phi$.

Таким чином, в LC відношення ${}^{Rc}|\!=_{IR}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$ різні, водночас в традиційній логіці квазіарних предикатів ${}^{R}|\!=_{IR} = \varnothing$ та ${}^{R}|\!=_{T} = {}^{R}|\!=_{F} = {}^{R}|\!=_{TF}$. При цьому в LC ${}^{R}|\!=_{IR} \neq \varnothing$, проте має дуже вироджений характер: якщо в формулах із Γ та Δ немає входжень $\sim$ то $\Gamma\, {}^{Rc}|\!\neq_{IR} \Delta$.

Властивості нових відношень логічного наслідку в LC, в яких не фігурують символи $\sim$, аналогічні відповідним властивостям відношень ${}^{P}|\!=_{IR}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$, описаним в [3–5].

Підсумовуючи, зведемо результати щодо наявності логічного наслідку в таблицю.

Таблиця. Наявність відношення логічного наслідку

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
${}^{Pc}|\!=_{IR}$	+	+	+	+	+	+	+
${}^{Pc}|\!=_{T}$	–	+	–	+	+	–	+
${}^{Pc}|\!=_{F}$	–	–	+	+	+	+	–
${}^{Pc}|\!=_{TF}$	–	–	–	+	+	–	–
${}^{Rc}|\!=_{IR}$	–	–	–	–	–	+	+
${}^{Rc}|\!=_{T}$	–	–	–	–	+	–	+
${}^{Rc}|\!=_{F}$	–	–	–	–	+	+	–
${}^{Rc}|\!=_{TF}$	–	–	–	–	+	–	–

Тут для відповідного відношення логічного наслідку такі скорочені позначення:

φ_1: $\Phi \vee (\vartheta \& \neg\vartheta) \models \Phi \,\&\, (\vartheta \vee \neg\vartheta)$ φ_2: $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \models \Delta$,

φ_3: $\Gamma \models \neg\Psi, \Psi, \Delta$ φ_4: $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \models \neg\Psi, \Psi, \Delta$,

φ_5: $\Phi, \Gamma \models \Phi, \Delta$ φ_6: $\Gamma, \Phi \models {}^{\sim}\Phi, \Delta$ φ_7: $\Gamma, \neg{}^{\sim}\Phi \models \Phi, \Delta$.

Теорема 1. Між розглянутими відношеннями логічного наслідку в LC маємо такі співвідношення (тут замість $\subset$ вживаємо стрілку $\rightarrow$):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & {}^{Rc}|\!=_{T} & \rightarrow & {}^{Pc}|\!=_{T} & & & \\
\nearrow & & \nearrow & & \searrow & & \\
{}^{Rc}|\!=_{TF} & \rightarrow & {}^{Pc}|\!=_{TF} & & {}^{Pc}|\!=_{IR} & \leftarrow & {}^{Rc}|\!=_{IR} \\
\searrow & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & {}^{Rc}|\!=_{F} & \rightarrow & {}^{Pc}|\!=_{F} & & &
\end{array}
$$

Вироджене відношення ${}^{Rc}|\!=_{IR}$ далі розглядати не будемо.

Надалі, якщо інше не зазначене окремо, будемо вживати такі позначення:

$|\!=_{*}$ – одне з відношень ${}^{Pc}|\!=_{IR}$, ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$;

${}_{J}|\!=_{*}$ – одне з відношень ${}_{J}|\!=_{IR}$, ${}_{J}|\!=_{T}$, ${}_{J}|\!=_{F}$, ${}_{J}|\!=_{TF}$;

${}^{Pc}|\!=_{*}$ – одне з ${}^{Pc}|\!=_{IR}$, ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$; ${}^{Rc}|\!=_{*}$ – одне з ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$;

$|\!=_{T}$ – одне з ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$; $|\!=_{F}$ – одне з ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$; $|\!=_{TF}$ – одне з ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$.

Відношення логічного наслідку індукують відношення логічної еквівалентності.

Нехай $\Phi, \vartheta \in Fr$. Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ задаємо за схемою:

$$\Phi \; {}_{J}\!\sim_{*} \Psi, \text{ якщо } \Phi \; {}_{J}|\!=_{*} \Psi \text{ та } \Psi \; {}_{J}|\!=_{*} \Phi.$$

Особливе значення має відношення ${}_{J}\!\sim_{TF}$ строгої еквівалентності:

$$\Phi_J \sim_{TF} \Psi \;\Leftrightarrow\; T(\Phi_J) = T(\Psi_J) \text{ та } F(\Phi_J) = F(\Psi_J) \;\Leftrightarrow\; \Phi_J = \Psi_J.$$

Задаємо відношення ${}^{Pc}\!\sim_{TF}$ та ${}^{Rc}\!\sim_{TF}$:

$$\Phi\, {}^{Pc}\!\sim_{TF} \Psi, \text{ якщо } \Phi_J \sim_{TF} \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C};$$

$$\Phi\, {}^{Rc}\!\sim_{TF} \Psi, \text{ якщо } \Phi_J \sim_{TF} \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}.$$

Згідно $\boldsymbol{P_C} \subset \boldsymbol{R_C}$ для всіх $\Phi, \Psi \in Fr$ маємо $\Phi\, {}^{Rc}\!\sim_{TF} \Psi \Rightarrow \Phi\, {}^{Pc}\!\sim_{TF} \Psi$.

Водночас (див. таблицю) невірно, що $\Phi\, {}^{Pc}\!\sim_{TF} \Psi \Rightarrow \Phi\, {}^{Rc}\!\sim_{TF} \Psi$.

Теорема еквівалентності для LC формулюється так:

Теорема 2. Нехай Φ' отримана з Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1\, {}^{*}\!\sim_{TF} \Psi_1, ..., \Phi_n\, {}^{*}\!\sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi\, {}^{*}\!\sim_{TF} \Phi'$ (тут ${}^{*}\!\sim_{TF}$ – це ${}^{Rc}\!\sim_{TF}$ чи ${}^{Pc}\!\sim_{TF}$).

Теорема еквівалентності доводиться індукцією за побудовою формули.

Теорема 3 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi\, {}^{*}\!\sim_{TF} \Psi$, тоді:

$$\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_* \Delta;\;\; \Gamma \models_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \Psi.$$

Дослідимо відношення ${}^{Pc}\!\models_{IR}$, ${}^{Pc}\!\models_{T}$, ${}^{Pc}\!\models_{F}$, ${}^{Pc}\!\models_{TF}$, ${}^{Rc}\!\models_{T}$, ${}^{Rc}\!\models_{F}$, ${}^{Rc}\!\models_{TF}$.

Властивості, в яких не фігурує композиція предикатного доповнення, в цілому аналогічні відповідним властивостям [3, 4] відомих відношень ${}^{P}\!\models_{IR}$, ${}^{P}\!\models_{T}$, ${}^{P}\!\models_{F}$, ${}^{P}\!\models_{TF}$ ${}^{R}\!\models_{TF}$.

M) $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma \;\Rightarrow (\Gamma \models_* \Delta \Rightarrow \Lambda \models_* \Sigma)$ – монотонність

Властивості декомпозиції формул:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \Phi, \Gamma \models_* \Delta$.

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg\neg\Phi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models_* \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma \models \Delta \;\Leftrightarrow\; \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_R$) $\Gamma \models_* \Delta, \Phi \vee \Psi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models_* \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models_* \Delta$.

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models_* \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models_* \Delta, \neg\Psi$.

Для ${}^{Pc}\!\models_{IR}$ додатково маємо:

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma\, {}^{Pc}\!\models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}^{Pc}\!\models_{IR} \Delta, \Phi$.

$\neg_R$) $\Gamma\, {}^{Pc}\!\models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\, {}^{Pc}\!\models_{IR} \Delta$.

Властивості $\neg_L$ та $\neg_R$ невірні для ${}^{Pc}\!\models_{T}$, ${}^{Pc}\!\models_{F}$, ${}^{Pc}\!\models_{TF}$, ${}^{Rc}\!\models_{T}$, ${}^{Rc}\!\models_{F}$, ${}^{Rc}\!\models_{TF}$.

Новими для відношень в LC є специфічні властивості декомпозиції в яких фігурує ${}^{\sim}\Phi$.

Теорема 4. Для ${}^{Pc}\!\models_{IR}$ неможливо коректно задати умови декомпозиції формул ${}^{\sim}\Phi$.

Нехай $\Phi, \Psi, \vartheta \in Fr$; $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$. Маємо ${}^{\sim}\theta, \Phi_J \models_{IR} \Psi \;\Leftrightarrow\; \perp({}^{\sim}\theta_J) \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; \overline{T(\theta_J) \cup F(\theta_J)} \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing$. Нехай предикат α утворено за допомогою ∨ та ¬ із деяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Тоді $T(\alpha)$ та $F(\alpha)$ подаються через області істинності й хибності предикатів $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ за допомогою лише ∩ та ∪.

Шукаємо теоретико-множинну функцію $f(X, Y)$, будовану із ∩ та ∪ таку, що за умови $X \cap Y = \varnothing$ маємо $\overline{X \cup Y} \cap L = \varnothing \Leftrightarrow f(X, Y) \cap L = \varnothing$. Має виконуватись умова:

$$\overline{T(\theta_J) \cup F(\theta_J)} \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing \;\Leftrightarrow\; f(T(\theta_J), F(\theta_J)) \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing.$$

Проте із X, Y таких, що $X \cap Y = \varnothing$, за допомогою ∩ та ∪ можна отримати лише 4 різних множини: $\varnothing$, X, Y, $X \cup Y$. Тому для $f(T(\theta_J), F(\theta_J))$ маємо лише 4 варіанти: $\varnothing$, $T(\vartheta_J)$, $F(\vartheta_J)$, $T(\vartheta_J) \cup F(\vartheta_J)$. Жоден з них не влаштовує зазначену умову.

Декомпозиція формул необхідна при побудові секвенційного числення, яке формалізує відповідне відношення логічного наслідку. Для ${}^{Pc}\!\models_{IR}$ така декомпозиція вимагає явного виділення області невизначеності, адже умова для ${}_{J}\!\models_{IR}$ не дає змоги подати область невизначеності через області істинності та хибності за допомогою лише ∩ та ∪. Явне виділення області

невизначеності означає перехід від ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ до загальнішого відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності, що зроблено в [8].

Відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ далі зазвичай розглядати не будемо.

Розглянемо властивості декомпозиції формул $\sim\Phi$ для ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$.

$\sim\Phi$ та $\neg\sim\Phi$ можуть бути в лівій частині та в правій частині відношення типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$ – всього 8 комбінацій.

$\sim_{\mathrm{LT}}$) $\sim\Phi, \Gamma |\!=_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$.

$\sim_{\mathrm{RT}}$) $\Gamma |\!=_T \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!=_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma |\!=_T \Delta$.

$\neg\sim_{\mathrm{RF}}$) $\Gamma |\!=_F \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma, \Phi, \neg\Phi |\!=_F \Delta$.

$\neg\sim_{\mathrm{LF}}$) $\neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_F \Delta, \Phi$ та $\Gamma |\!=_F \Delta, \neg\Phi$.

Наступні властивості $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ та $\sim_{\mathrm{El}}$ фактично є властивостями спрощення.

$\neg\sim_{\mathrm{El}}$) $\Gamma |\!=_T \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta$.

$\sim_{\mathrm{El}}$) $\sim\Phi, \Gamma |\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_F \Delta$.

Залишились 2 комбінації, які дають властивості гарантованої наявності відношення логічного наслідку. Для всіх $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$ маємо $F(\sim\Phi_J) = T(\neg\sim\Phi_J) = \varnothing$ звідки:

$C\sim$) $\Gamma |\!=_F \sim\Phi, \Delta$.

$C\neg\sim$) $\Gamma, \neg\sim\Phi |\!=_T \Delta$.

Зауважимо, що аналогічна до $C\sim$ властивість для $|\!=_T$ – це властивість $\sim_{\mathrm{LT}}$, аналогічна до $C\neg\sim$ властивість для $|\!=_F$ – це властивість $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$.

На відміну від ${}_J|\!=_{IR}$, для ${}_J|\!=_T$ та ${}_J|\!=_F$ області невизначеності *можна* подати через області істинності та хибності за допомогою лише $\cap$ та $\cup$, тобто *можна* елімінувати області невизначеності. Це засвідчують $\sim_{\mathrm{LT}}$, $\sim_{\mathrm{RT}}$, $\neg\sim_{\mathrm{RF}}$, $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$, $\neg\sim_{\mathrm{El}}$, $\sim_{\mathrm{El}}$.

Для відношень ${}^{Rc}|\!=_{TF}$ та ${}^{Pc}|\!=_{TF}$ ситуація інша. Це зумовлено асиметричною поведінкою композиції $\sim$ щодо областей істинності й хибності. Для відношень типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$ маємо різні властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$, які не можна подати як спільну властивість для відношень типу $|\!=_{TF}$. Для них маємо:

$\sim\Phi, \Gamma |\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \sim\Phi, \Gamma |\!=_T \Delta$ та $\sim\Phi, \Gamma |\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Gamma |\!=_F \Delta$.

$\Gamma |\!=_{TF} \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta, \neg\sim\Phi$ та $\Gamma |\!=_F \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta$ та $\Gamma, \Phi, \neg\Phi |\!=_F \Delta$.

$\Gamma |\!=_{TF} \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta, \sim\Phi$ та $\Gamma |\!=_F \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!=_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma |\!=_T \Delta$.

$\neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_T \Delta$ та $\neg\sim\Phi, \Gamma |\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_F \Delta, \Phi$ та $\Gamma |\!=_F \Delta, \neg\Phi$.

Таким чином, секвенційне числення для відношення $|\!=_{TF}$ має бути поєднанням числень для відношень $\Gamma |\!=_T \Delta$ та $\Gamma |\!=_F \Delta$: для встановлення $\Gamma |\!=_{TF} \Delta$ будуємо два виведення, перше з них встановлює $\Gamma |\!=_T \Delta$, а друге виведення встановлює $\Gamma |\!=_F \Delta$.

Розглянемо властивості, які гарантують наявність відношення логічного наслідку.

Для усіх розглянутих відношень логічного наслідку маємо властивість:

C) $\Phi, \Gamma |\!=_* \Delta, \Phi$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення такі відомі властивості.

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_T \Delta$.

CR) $\Gamma\ {}^{Pc}|\!=_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$.

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Отже, маємо такі властивості гарантованої наявності відношення логічного наслідку:

– *C*, *CL*, $C\neg\sim$ для ${}^{Pc}|\!=_T$;

– *C*, *CR*, $C\sim$ для ${}^{Pc}|\!=_F$;

– *C*, *CLR* для ${}^{Pc}|\!=_{TF}$;

– *C*, $C\neg\sim$ для ${}^{Rc}|\!=_T$;

– *C*, $C\sim$ для ${}^{Rc}|\!=_F$;

– C для ${}^{Rc}|\!=_{TF}$.

Розглянемо пов'язані з реномінацією властивості еквівалентних перетворень для відношень логічного наслідку в LC. Кожна з наведених вище властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨, R~, R∃, R∃s продукує 4 відповідні властивості для відношень ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення.

Наведемо тут властивості, індуковані R~, інші властивості формулюються аналогічно відповідним властивостям [4] для ${}^{P}|\!=_T$, ${}^{P}|\!=_F$, ${}^{R}|\!=_{TF}$. Далі $|\!=_*$ – одне з ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$.

R~L) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi), \Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; {}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |\!=_* \Delta$.

R~R) $\Gamma |\!=_* \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma |\!=_* \Delta, {}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

¬R~L) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi), \Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg{}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |\!=_* \Delta$.

¬R~R) $\Gamma |\!=_* \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma |\!=_* \Delta, \neg{}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

Для відношень типу $|\!=_{TF}$ властивості еквівалентних перетворень теж вірні, проте їх задаємо *опосередковано*, через відповідні властивості для відношень типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$. При цьому враховуємо: $\Gamma |\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma |\!=_T \Delta$ та $\Gamma |\!=_F \Delta$.

Властивості елімінації кванторів, *E*-розподілу та первісного означення для відношень ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_F$ аналогічні відповідним властивостям [4] для відношень ${}^{P}|\!=_T$, ${}^{P}|\!=_F$, ${}^{R}|\!=_{TF}$.

Теорема 5. Нехай $\Phi \in Fr$; $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$; тоді:

∃L) за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi))$ маємо $\exists x\Phi, \Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma |\!=_* \Delta$;

∃RL) за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), Ez, \Gamma |\!=_* \Delta$;

¬∃R) за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi))$ маємо $\Gamma |\!=_* \neg\exists x\Phi, \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma, Ez |\!=_* \neg R_z^x(\Phi), \Delta$

¬∃RR) за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ $\Gamma |\!=_* \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma, Ez |\!=_* \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$

∃vR) $\Gamma, Ey |\!=_* \exists x\Phi, \Delta \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \Gamma, Ey |\!=_* \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$.

∃RvR) $\Gamma, Ey |\!=_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \Gamma, Ey |\!=_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$.

¬∃vL) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma |\!=_* \Delta$.

¬∃RvL) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), Ey, \Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), Ey, \Gamma |\!=_* \Delta$.

Теорема 6. Для $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$ маємо:

Ed) $\Gamma |\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma |\!=_* \Delta, Ey$ та $Ey, \Gamma |\!=_* \Delta$.

Ev) $\Gamma |\!=_* \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma |\!=_* \Delta$, де $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

3. Відношення логічного наслідку за умов невизначеності

Наявність в LC нової композиції предикатного доповнення мотивує до розгляду нових відношень логічного наслідку, які враховують особливості цієї композиції. Такими є відношення *логічного наслідку за умови невизначеності*.

Нехай $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$. Δ є неспростовнісним наслідком Γ за умов невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma_J |\!=_{IR}^{\perp} \Delta$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є неспростовнісним логічним наслідком Γ за умов невизначеності U, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma |\!=_{IR}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma_J |\!=_{IR}^{\perp} \Delta$ для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$.

Відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ досліджене в [8]. Якщо $\mathrm{U} = \varnothing$, то маємо відоме відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$.

Вироджене відношення ${}^{R}|\!=_{IR}^{\perp}$, яке відповідає виродженому ${}^{Rc}|\!=_{IR}$, тут не розглядаємо.

Узагальненнями відомих [3, 4] відношень типу $|\!=_T$, $|\!=_F$ та $|\!=_{TF}$ для традиційних логік квазіарних предикатів є пропоновані в цій роботі відношення істиннісного хибнісного та строгого логічного наслідку за умов невизначеності. Ми вводимо:

– відношення ${}^{P}|\!=_{T}^{\perp}$ та ${}^{R}|\!=_{T}^{\perp}$ логічного T-наслідку за умов невизначеності;

– відношення ${}^{P}|\!=_{F}^{\perp}$ та ${}^{R}|\!=_{F}^{\perp}$ логічного F-наслідку за умов невизначеності;

– відношення ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$ та ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$ логічного TF-наслідку в LPC за умов невизначеності.

– відношення логічного T-наслідку в LC за умов невизначеності;

Δ є T-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{T}^{\perp}\Delta$, якщо $T^{\frown}(\Gamma_J)\cap\perp^{\frown}(\mathrm{U}_J)\subseteq T^{\smile}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{F}^{\perp}\Delta$, якщо $F^{\frown}(\Delta_J)\cap\perp^{\frown}(\mathrm{U}_J)\subseteq F^{\smile}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{TF}^{\perp}\Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{T}^{\perp}\Delta$ та $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{F}^{\perp}\Delta$.

Якщо $\mathrm{U}=\varnothing$, то маємо визначення відношень $\Gamma_J|\!=_{T}\Delta$, $\Gamma_J|\!=_{F}\Delta$, $\Gamma_J|\!=_{TF}\Delta$ в LC.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за традиційною схемою: $\mathrm{U}/\Gamma^{\alpha}|\!=_{\tau}^{\perp}\Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{\tau}^{\perp}\Delta$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{\alpha}$.

Δ є логічним T-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{P_C}$, що позначимо якщо $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{T}^{\perp}\Delta$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$.

Якщо $\mathrm{U}=\varnothing$, то маємо визначення ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$.

Твердження 2. $\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{T}^{\perp}\Delta$ та $\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{F}^{\perp}\Delta$;

$\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{T}^{\perp}\Delta$ та $\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{F}^{\perp}\Delta$.

Для $\mathrm{S}\subseteq Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ маємо $T^{\smile}(\mathrm{S}_J)\cap F^{\frown}(\mathrm{S}_J)=\varnothing$ та $F^{\smile}(\mathrm{S}_J)\cap T^{\frown}(\mathrm{S}_J)=\varnothing$. Звідси отримуємо

Твердження 3. Для довільних $\Gamma,\mathrm{U},\Delta\subseteq Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ маємо:

$\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{T}^{\perp}\Delta \Rightarrow \mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{IR}^{\perp}\Delta$; $\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{F}^{\perp}\Delta \Rightarrow \mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_{IR}^{\perp}\Delta$.

Твердження 4. 1) $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_{IR}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$ та $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,|\!=_{IR}^{\perp}\Delta$;

2) $\Gamma\,{}^{Pc}|\!\neq_{T}\Psi,\neg\Psi$ та $\Phi,\neg\Phi\,{}^{Pc}|\!\neq_{F}\Delta$, тому $\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}|\!\neq_{T}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$ та $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{P}|\!\neq_{F}^{\perp}\Delta$;

3) $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{P}|\!=_{T}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$ та $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{P}|\!=_{F}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$, тому $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$;

4) $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{R}|\!\neq_{T}\Psi,\neg\Psi$; $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{R}|\!\neq_{F}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$; $\mathrm{U}/\Phi,\neg\Phi\,{}^{R}|\!\neq_{TF}^{\perp}\Psi,\neg\Psi$.

Теорема 7. Співвідношення між відношеннями $|\!=_{IR}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$ ідентичні співвідношенням між ${}^{Pc}|\!=_{IR}$, ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & {}^{R}|\!=_{T}^{\perp} \arrow[r] & {}^{P}|\!=_{T}^{\perp} \arrow[dr] & \\
{}^{R}|\!=_{TF}^{\perp} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & {}^{P}|\!=_{TF}^{\perp} \arrow[ur] \arrow[dr] & & |\!=_{IR}^{\perp} \\
 & {}^{R}|\!=_{F}^{\perp} \arrow[r] & {}^{P}|\!=_{F}^{\perp} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Сформулюємо теорему заміни еквівалентних для відношень $|\!=_{T}^{\perp}$, $|\!=_{F}^{\perp}$, $|\!=_{TF}^{\perp}$.

Теорема 8. 1) Нехай $\Phi\,{}^{P}\!\sim_{TF}\Psi$, тоді маємо (${}^{P}|\!=_{*}$ – це ${}^{P}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}^{\perp}$ чи ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$):

$\mathrm{U}/\Phi,\Gamma\,{}^{P}|\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Psi,\Gamma\,{}^{P}|\!=_{*}\Delta$;

$\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{*}\Delta,\Phi \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{*}\Delta,\Psi$;

$\mathrm{U},\Phi/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U},\Psi/\Gamma\,{}^{P}|\!=_{*}\Delta$.

2) Нехай $\Phi\,{}^{R}\!\sim_{TF}\Psi$, тоді маємо (${}^{R}|\!=_{*}$ – це ${}^{R}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}^{\perp}$ чи ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$):

$\mathrm{U}/\Phi,\Gamma\,{}^{R}|\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Psi,\Gamma\,{}^{R}|\!=_{*}\Delta$;

$\mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{*}\Delta,\Phi \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{*}\Delta,\Psi$;

$\mathrm{U},\Phi/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U},\Psi/\Gamma\,{}^{R}|\!=_{*}\Delta$.

Дослідимо властивості відношень ${}^{P}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$.

Особливості цих відношень проявляються вже на пропозиційному рівні.

Для множини формул $\Sigma\subseteq Fr$ використаємо позначення ${}^{\neg}\Sigma=\{\neg\Phi\,|\,\Phi\in\Sigma\}$.

Тоді позначаємо $\bigcap_{\theta\in\Sigma} T(\neg\theta_J)$ як $T^{\cap}(\neg\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} F(\neg\theta_J)$ як $F^{\cap}(\neg\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} \perp(\neg\theta_J)$ як $\perp^{\cap}(\neg\Sigma_J)$,

$\bigcup_{\theta\in\Sigma} T(\neg\theta_J)$ як $T^{\cup}(\neg\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} F(\neg\theta_J)$ як $F^{\cup}(\neg\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} \perp(\neg\theta_J)$ як $\perp^{\cup}(\neg\Sigma_J)$.

Маємо $\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) = \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} \perp(\theta_J) = \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} (\overline{T(\theta_J)} \cap \overline{F(\theta_J)}) = \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} \overline{T(\theta_J)} \cap \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} \overline{F(\theta_J)} = \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)}$.

Таким чином, для *R*-предикатів $\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) = \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\neg\theta_J)} = \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\neg\theta_J)}$.

Звідси визначальне твердження:

Теорема 9. $_J|\!=_T^{\perp}$ можна звести до $_J|\!=_T$; $_J|\!=_F^{\perp}$ можна звести до $_J|\!=_F$.

Маємо $\mathrm{U}/\Gamma\,_J|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J)\cap\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J)\cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\neg\theta_J)} \subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow$

$T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup \bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)\cup \bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\neg\theta_J) \Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup T^{\cup}(\mathrm{U}_J)\cup T^{\cup}(\neg\mathrm{U}_J) \Leftrightarrow \Gamma\,_J|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$;

$\mathrm{U}/\Gamma\,_J|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow F^{\cap}(\Delta_J)\cap\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J) \Leftrightarrow F^{\cap}(\Delta_J)\cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\neg\theta_J)} \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J) \Leftrightarrow$

$F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup \bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)\cup \bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\neg\theta_J) \Leftrightarrow F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup F^{\cup}(\mathrm{U}_J)\cup F^{\cup}(\neg\mathrm{U}_J) \Leftrightarrow \Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,_J|\!=_F\Delta$.

Подібним способом отримуємо загальніші твердження:

$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,_J|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,_J|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$; $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,_J|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,_J|\!=_F^{\perp}\Delta$.

Ми отримали фундаментальну теорему про елімінацію умов невизначеності:

Теорема 10. $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,^P|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$;

$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,^R|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$;

$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,^P|\!=_F^{\perp}\Delta$;

$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,^R|\!=_F^{\perp}\Delta$.

Наслідок 1. $\mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma^{Pc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$; $\mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma^{Rc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$;

$\mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}^{Pc}|\!=_F\Delta$; $\mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}^{Rc}|\!=_F\Delta$.

Теорема 10 дає змогу сформулювати властивості елімінації умов невизначеності у відношеннях $^P|\!=_T^{\perp}$, $^P|\!=_F^{\perp}$, $^R|\!=_T^{\perp}$, $^R|\!=_F^{\perp}$:

ElU$_T$) $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,^P|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$; $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\,^R|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$;

ElU$_F$) $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,^P|\!=_F^{\perp}\Delta$; $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\,^R|\!=_F^{\perp}\Delta$.

Таким чином, від $^P|\!=_T^{\perp}$, $^P|\!=_F^{\perp}$, $^R|\!=_T^{\perp}$, $^R|\!=_F^{\perp}$ можна перейти до $^{Pc}|\!=_T$, $^{Pc}|\!=_F$, $^{Rc}|\!=_T$, $^{Rc}|\!=_F$.

Наслідок 2. $\mathrm{U}/\Gamma\,^P|\!=_{TF}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma^{Pc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$ та $\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}^{Pc}|\!=_F^{\perp}\Delta$.

$\mathrm{U}/\Gamma\,^R|\!=_{TF}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma^{Rc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$ та $\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}^{Rc}|\!=_F^{\perp}\Delta$.

Отже, відношення типу $|\!=_{TF}^{\perp}$ можна звести лише до сукупності відношень типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$, а не до єдиного відношення типу $|\!=_{TF}$. Те ж саме було для $^{Pc}|\!=_{TF}$ та $^{Rc}|\!=_{TF}$: проведення декомпозиції формул вимагає подання $^{Rc}|\!=_{TF}$ через $^{Rc}|\!=_T$ та $^{Rc}|\!=_F$, а $^{Pc}|\!=_{TF}$ – через $^{Pc}|\!=_T$ та $^{Pc}|\!=_F$.

Підсумовуючи, отримуємо:

Теорема 11. Відношення $^P|\!=_T^{\perp}$, $^P|\!=_F^{\perp}$, $^R|\!=_T^{\perp}$, $^R|\!=_F^{\perp}$ та $^P|\!=_{TF}^{\perp}$, $^R|\!=_{TF}^{\perp}$ можна промоделювати за допомогою $^{Pc}|\!=_T$, $^{Pc}|\!=_F$, $^{Rc}|\!=_T$, $^{Rc}|\!=_F$, усунувши умови невизначеності.

Водночас для відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ *неможливо* таким способом усунути умови невизначеності і тим самим промоделювати $|\!=_{IR}^{\perp}$ за допомогою $^{Pc}|\!=_{IR}$. Це фактично вже випливає з теореми 4; безпосереднє доведення аналогічне доведенню теореми 4. Таким чином:

Теорема 12. В LC відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ не можна звести до відношення $^{Pc}|\!=_{IR}$.

Укажемо основні властивості відношень $^P|\!=_T^{\perp}$, $^P|\!=_F^{\perp}$, $^R|\!=_T^{\perp}$, $^R|\!=_F^{\perp}$, $^P|\!=_{TF}^{\perp}$, $^R|\!=_{TF}^{\perp}$.

Надалі, якщо інше не зазначене окремо: $|\!=_*^{\perp}$ – одне з $^P|\!=_T^{\perp}$, $^P|\!=_F^{\perp}$, $^R|\!=_T^{\perp}$, $^R|\!=_F^{\perp}$;

$|\!=_T^{\perp}$ – одне з $^P|\!=_T^{\perp}$, $^R|\!=_T^{\perp}$; $|\!=_F^{\perp}$ – одне з $^P|\!=_F^{\perp}$, $^R|\!=_F^{\perp}$; $|\!=_{TF}^{\perp}$ – одне з $^P|\!=_{TF}^{\perp}$, $^R|\!=_{TF}^{\perp}$.

M) Нехай $\Gamma\subseteq\Lambda$, $\mathrm{U}\subseteq\mathrm{W}$, та $\Delta\subseteq\Sigma$; тоді $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_*^{\perp}\Delta \Rightarrow \mathrm{W}/\Lambda\,|\!=_*^{\perp}\Sigma$ – монотонність.

Маємо такі властивості гарантованої наявності логічного наслідку.

C_{LR}) $U/\Phi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \Phi$;

C_{UL}) $U, \Phi/\Phi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta$;

C_{UR}) $U, \Phi/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \Phi$;

$C\neg\sim$) $U/\neg\sim\Phi, \Gamma \models_T^{\perp} \Delta$.

$C\sim$) $U/\Gamma \models_F^{\perp} \Delta, \sim\Phi$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення такі властивості.

CL) $U/\Phi, \neg\Phi, \Gamma \,{}^{P}\!\models_T^{\perp} \Delta$; це рівносильне такому: $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \,{}^{Pc}\!\models_T \Delta, U, \neg U$;

CR) $U/\Gamma \,{}^{P}\!\models_F^{\perp} \Delta, \Phi, \neg\Phi$; це рівносильне такому: $\Gamma, U, \neg U \,{}^{Pc}\!\models_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$.

Властивість C сформульована як C_{LR} та розширена властивостями C_{UL}, C_{UR}. Властивості $C\sim$, $C\neg\sim$, CL, CR тут узагальнені для відношень логічного наслідку за умов невизначеності.

Властивості декомпозиції логічних зв'язок аналогічні наведеним вище відповідним властивостям для ${}^{Pc}\!\models_T$, ${}^{Pc}\!\models_F$, ${}^{Pc}\!\models_{TF}$, ${}^{Rc}\!\models_T$, ${}^{Rc}\!\models_F$, ${}^{Rc}\!\models_{TF}$; вони виконуються для усіх відношень ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_{TF}^{\perp}$.

$\neg\neg_L$) $U/\neg\neg\Phi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U/\Phi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta$.

$\neg\neg_R$) $U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $U/\Phi\vee\Psi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U/\Phi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta$ та $U/\Psi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta$.

$\vee_R$) $U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $U/\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models_*^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U/\neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta$.

$\neg\vee_R$) $U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \neg\Phi$ та $U/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{IR}^{\perp}$ додатково маємо [8] властивості $\neg_L$ та $\neg_R$.

Властивості декомпозиції, в яких фігурує $\sim\Phi$:

$\sim_{LT}$) $U/\sim\Phi, \Gamma \models_T^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U/\Gamma \models_T^{\perp} \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

$\sim_{RT}$) $U/\Gamma \models_T^{\perp} \Delta, \sim\Phi \Leftrightarrow U/\Phi, \Gamma \models_T^{\perp} \Delta$ та $U/\neg\Phi, \Gamma \models_T^{\perp} \Delta$;

$\neg\sim_{RF}$) $U/\Gamma \models_F^{\perp} \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow U/\Gamma, \Phi, \neg\Phi \models_F^{\perp} \Delta$;

$\neg\sim_{LF}$) $U/\neg\sim\Phi, \Gamma \models_F^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U/\Gamma \models_F^{\perp} \Delta, \Phi$ та $U/\Gamma \models_F^{\perp} \Delta, \neg\Phi$;

$\neg\sim_{EI}$) $U/\Gamma \models_T^{\perp} \Delta, \neg\sim\Phi \Leftrightarrow U/\Gamma \models_T^{\perp} \Delta$;

$\sim_{EI}$) $U/\sim\Phi, \Gamma \models_F^{\perp} \Delta \Leftrightarrow U/\Gamma \models_F^{\perp} \Delta$.

Для всіх відношень ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$ можна сформулювати:

$C_{\sim *}$) $U, \Phi/\Gamma \models_*^{\perp} \Delta, \sim\Phi$;

$C_{\neg\sim *}$) $U, \Phi/\neg\sim\Phi, \Gamma \models_*^{\perp} \Delta$.

Для $\models_F^{\perp}$ $C_{\sim *}$ – окремий випадок $C\sim$; для $\models_T^{\perp}$ $C_{\sim *}$ є похідною від EIU_T, $\sim_{RT}$, C. Для $\models_T^{\perp}$ $C_{\neg\sim *}$ – окремий випадок $C\neg\sim$; для $\models_F^{\perp}$ $C_{\neg\sim *}$ є похідною від EIU_F, $\neg\sim_{LF}$, C.

Властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$ *різні* для відношень типу $\models_T^{\perp}$ та типу $\models_F^{\perp}$, тому для відношень типу $\models_{TF}^{\perp}$ властивості декомпозиції $\sim\Phi$ не можна подати як спільну властивість для відношень типу $\models_{TF}$. Тому властивості декомпозиції та гарантованої наявності логічного наслідку для відношень типу $\models_{TF}^{\perp}$ можна задати опосередковано, через відповідні властивості для відношень типу $\models_T^{\perp}$ та типу $\models_F^{\perp}$.

Пов'язані з реномінацією властивості еквівалентних перетворень для відношень ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$ подібні до відповідних властивостей для ${}^{Pc}\!\models_T$, ${}^{Pc}\!\models_F$, ${}^{Rc}\!\models_T$, ${}^{Rc}\!\models_F$.. Кожна з властивостей R, RI, RU, RR, $R\neg$, $R\vee$, $R\sim$, $R\exists$, $R\exists s$ дає 6 відповідних властивостей для ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення або входить до умови невизначеності. Враховуючи властивості EIU_T та EIU_F елімінації умови невизначеності, явно виписувати 2 випадки, коли виділена формула чи її заперечення входить до умови невизначеності, немає потреби.

Для прикладу властивості, індуковані, $R\sim$ ($\models_*^{\perp}$ – одне з ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$):

$\mathrm{R}^{\sim}{}_{\mathrm{L}})\ \mathrm{U}/R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi),\Gamma\models_*^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}/{}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\models_*^{\perp}\Delta;$

$\mathrm{R}^{\sim}{}_{\mathrm{R}})\ \mathrm{U}/\Gamma\models_*^{\perp}\Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}/\Gamma\models_*^{\perp}\Delta, {}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi);$

$\neg\,\mathrm{R}^{\sim}{}_{\mathrm{L}})\ \mathrm{U}/\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi),\Gamma\models_*^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}/\neg{}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\models_*^{\perp}\Delta;$

$\neg\,\mathrm{R}^{\sim}{}_{\mathrm{R}})\ \mathrm{U}/\Gamma\models_*^{\perp}\Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}/\Gamma\models_*^{\perp}\Delta, \neg{}^{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi).$

Властивості елімінації кванторів, *E*-розподілу та первісного означення для відношень ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$ подібні до відповідних властивостей для ${}^{Pc}\!\models_T$, ${}^{Rc}\!\models_T$, ${}^{Pc}\!\models_F$, ${}^{Rc}\!\models_F$.

Наведемо для прикладу властивості $\exists_{\mathrm{L}}$ та $\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{R}}$.

$\exists_{\mathrm{L}})$ за умови $z\in fu(\mathrm{U},\Gamma,\Delta,\exists x\Phi))$ маємо $\mathrm{U}/\exists x\Phi,\Gamma\models_*^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/R_z^x(\Phi), Ez,\Gamma\models_*^{\perp}\Delta;$

$\exists\mathrm{Rv}_{\mathrm{R}})\ \mathrm{U}/\Gamma, Ey\models_*^{\perp}\Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}/\Gamma, Ey\models_*^{\perp}\Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi).$

Висновки

Досліджено першопорядкові LC – логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення $\sim$. Подібні операції використовуються в різних варіантах логік Флойда-Хоара з частковими перед- та після-умовами. Описано композиційні алгебри і мови LC. Запропоновано низку відношень логічного наслідку в LC (типів $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{IR}$) та логічного наслідку за умови невизначеності (типів $\models_T^{\perp}$, $\models_F^{\perp}$, $\models_{TF}^{\perp}$). Досліджено властивості цих відношень, встановлено співвідношення між ними. Для запропонованих відношень описано умови їх гарантованої наявності, наведено властивості декомпозиції формул та елімінації кванторів. Для відношень типів $\models_T$ та $\models_F$ доведено теорему про елімінацію умов невизначеності, що дає змогу звести ${}^{P}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{P}\!\models_F^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_T^{\perp}$, ${}^{R}\!\models_F^{\perp}$ до ${}^{Pc}\!\models_T$, ${}^{Pc}\!\models_F$, ${}^{Rc}\!\models_T$, ${}^{Rc}\!\models_F$. Водночас $\models_{IR}^{\perp}$ неможливо звести до ${}^{Pc}\!\models_{IR}$. Понад те, для ${}^{Pc}\!\models_{IR}$ неможливо коректно задати умови декомпозиції $\sim\Phi$.

Все це засвідчує істотну відмінність LC від традиційної логіки квазіарних предикатів

Для досліджених відношень логічного наслідку в LC та відношень логічного наслідку за умов невизначеності планується побудова першопорядкових числень секвенційного типу.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993–2000.
2. S.C. Kleene. Mathematical Logic. New York, 1967.
3. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
4. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.
5. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. Algebra and Discrete Mathematics, Vol. 23 (2017). N 2. P. 263–278.
6. Hoare C. An axiomatic basis for computer programming, Comm. 1969. ACM. 12(10). P. 576–580.
7. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement, Comm. in Computer and Information Science. 2019. Vol 1007. Springer, Cham. P. 71–88.
8. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С., Мамедов Т.А. Пропозиційні логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування.* 2019. № 1. С. 3–13.
9. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak. Program Logics of Renominative Level with the Composition of Predicate Complement, *in* Proceedings of the 15th International Conference on ICT. CEUR Workshop, vol. 2393, pp. 603–616 (2019).

ТЕЗИ

Ievgen Ivanov

Taras Shevchenko National University of Kyiv

ON THE OPEN INDUCTION PRINCIPLE

Ievgen Ivanov

Key words: open induction, mathematical induction, ordered set.

In [1] a property (total predicate) P on a poset E is called inductive, if it satisfies $\forall y(\forall x(x > y \Rightarrow Px) \Rightarrow Py)$ and is called open, if for each chain X in E, if X is nonempty and has the least upper bound x^* and $P(x^*)$ holds, then $P(x)$ holds for some $x \in X$.

Raoult's open induction principle [1, Theorem 3.3], which generalizes in a certain way the principle of Noetherian induction, states that on a (directed-)complete partial order an inductive and open property is true everywhere. Some discussion and applications can be found in [2-4].

In this talk we propose the following converse statement.

Theorem. A poset such that each inductive and open property on it is true everywhere is a dcpo.

We show the relation of this statement and the open induction principle to some other induction principles proposed in the literature, such as variants of real induction [5].

1. Raoult J.-C. Proving open properties by induction / J.-C. Raoult // Information Processing Letters 29. – 1988. – P. 19-23.

2. Coquand T. A note on the open induction principle // T. Coquand / Tech. rep. Goteborg University. – 1997.

3. Schuster P. Induction in algebra: a first case study / P. Schuster // Logical Methods in Computer Science. – Vol. 9. – 2013. – P. 1-19.

4. Berger U. A computational interpretation of open induction // U. Berger / Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science. – 2004.

5. Clark P. The instructor's guide to real induction / P. Clark // Mathematics Magazine 92. – 2019. – P. 136-150.

Yaroslav Kokhan

Institute of Philosophy, National Academy Of Sciences, Kyiv, Ukraine

e-mail: yarkaen@gmail.com

CORRECTION FOR λ-CONVERSION IN FUNCTIONAL LOGIC

Yaroslav Kokhan

As we know, the type-free (i. e., the richest) λ-calculus is inconsistent [1] (Curry's paradox proves this inconsistency). The cause of this situation is the incorrectness of the axiom (β), which is following:

$$\lambda x f(x)(a) = f(a).$$

Here the one and the same object treated and designated as an individual, say, $\lambda x f(x)$ (individuals have no arguments) and, at the same time, as a 1-ary function, which has values of the form $\ldots f \ldots (a)$. This is an immediate contradiction: to have arguments as a function and to have no arguments as an individual.

We can solve this problem, if we extent both predicate logic and set-theoretic theory of functions to *functional logic* (or *function logic* [2]), in which functions treated as n-ary (as $n \geq 0$) functions-in-intension that are ambiguous in general case (i. e., their graphs are partial multimaps). The atomic formulas have in functional logic the form s ≈ t, which is read "the object s is a value (if they exist) of the function t with arguments (if it has them)". The logical relation ≈ is called *representation* and is the generalization of equality at the case of ambiguous functions. In formal languages of functional logic, the i-th value of the function $f^{(n)}$ at arguments $a_1, \ldots, a_n$ is designated by the term '$f^i(a_1, \ldots, a_n)$' (if the value is unique, then $i = 0$) and the very function $f^{(n)}$ with argument places $x_1, \ldots, x_n$ (the function $f^{(0)}$ with no arguments) is designated by the term '$f^{x_1,\ldots,x_n}$' (the term 'f^{λ}'; here 'λ' denotes the empty list of arguments). A value of the function t can be as well designated by the term '(t)'.

In *type-free* functional logic, the incorrect formula (β) can be replaced by the following correct—and more general—formula:

$$\left(f^{g^i}\right)^j \approx f\left(g^i\right),$$

(where $i, j \geq 0$) or, in the case of 1-valued functions and individual variables, by the following formula:

$$(f^a)^0 \approx f(a).$$

Both these formulas are deduced (for any $i, j \geq 0$) from the following theorem of the type-free functional logic:

$$f^1 \approx \left(g^\lambda\right) \leftrightarrow f^1 \approx g.$$

So we can replace the type-free λ-calculus by any one of calculi of type-free functional logic, which contains no contradictions and paradoxes.

References

[1] Barendregt, H.P. (1984). The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics. Elsevier, xv, 621 pp.
[2] Kokhan, Y. (2012). Semantic presuppositions in logical syntax. Journal of Applied Non-Classical Logics, 22(1), 29-41.

Krukovets Dmytro, PhD student, Computer Science and Cybernetics department

Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, Ukraine

e-mail: krukovetsdmytro@gmail.com; dkrukovets@kse.org.ua

NON-STATIONARY TIME-SERIES DISTANCE CLUSTERING FOR A SIMILARITY ANALYSIS

Krukovets Dmytro

Keywords: time-series, clustering, Euclidean and non-euclidean distance, Dynamic Time Warping.

Time-Series analysis is a widely popular tool in different fields, starting from classical Computer Science and applications such as sound recognition, to Economics, Biology and many else. Sometimes, the question about the similarity of these series arise. For example, to estimate whether the spoken text is the same regardless of the intonation or to find similar components in terms of particular goods inflation throughout the time.

This is the case when clustering is very useful, because these algorithms are called to extract the similarity. But this exercise is not that straightforward and thus will be described further in details. There will be used distance-based algorithms in different metrics, dimensionality reduction tools as an alternative way to create a map. Then, the clustering algorithms are used to divide series into combinations by similarity. Tools are from simple K-means to sophisticated fuzzy logic-based and other logical clustering algorithms.

The routine begins with creating the map of series in the point representation. There are two main approaches to do so: using dimensionality reduction techniques to capture maximum information from series and using a distance matrix between these series and its mapped representation. First, the dimensionality reduction. From the general name of algorithms, it is clear that a set of n-dimensional point (where n is some observations and the distance by k-axis is a value in moment k) might be converted to the set of t-dimensional, where t is less than n (it is 2 often). A good way to start with dimensionality reduction algorithms is with the paper by Sharma, 2019. It's a general overview of the most basic algorithms in the area. As main benchmarks in this field, I use Principal Component Analysis (described by Shlens, 2005), t-distributed Stochastic Neighbor Embedding (t-SNE by Maaten and Hinton, 2008) and Unifold Manifold Approximation and Projection (UMAP by McInnes et al., 2018). They represent the field well as they're general, but still quite sophisticated to be effective in such an exercise.

The second approach, which sounds like a more useful and appropriate, is to calculate dynamics between component series to create a distance matrix. These distances might be calculated in different spaces, Euclidean and non-Euclidean (Caiado et al, 2006), that capture some data-related features, based on the series nature, to find the most appropriate distances and realistic distances. Then from this matrix, there is a single representation of the map with a given metric, that corresponds to the distance. A proof, as long as an idea overview, can be found in the

paper by Dokmanic et al., 2019. Similar idea to measure distances between ARIMA modelled time-series to cluster them by dynamics were made by Kalpakis et al. in 2002.

A modified way to find distances, which is closely related to non-Euclidean approaches, is to use a Dynamic Time Warping algorithm (DTW, Berndt and Clifford, 1994). The general idea is that component series might have similar dynamics, but more stretched or compressed, for example throughout the year due to seasonal patterns and effects. Also, they might react to similar shocks and events with a different lag. This algorithm makes it able to work with these series. Izakian et al. make an exercise with DTW approach to map series and cluster them between each other.

When the map is ready for the final stage, a question about which clustering approach is the best to use in the particular exercise arise. Xu and Tian made a good overview of clustering techniques in 2015, to find the most appropriate one. In the paper two classic algorithms are in use: K-Means (MacQueen, 1967) and Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN, Ester et al., 1996). They and their combination are chosen due to the different nature, simplicity and fundamentality. As a more advanced algorithm, logical clustering, that is well described by Vazquez-Chanlatte et al., 2017, is used.

This exercise will result in a model that cluster components by similar dynamics. It can be used as superior to the simple correlation analysis because it can also capture the very nature of the data using different non-euclidean distances. Also, using the DTW algorithm will count the shifts and distortions in the data.

A great use-case is an update for a CARMA model, used by the National Bank of Ukraine and described in the forthcoming paper by Krukovets and Verchenko, 2019, which is based on the paper for the Swiss National Bank by Huwiler and Kaufmann, 2013. It is a model that predicts inflation components via ARMA approach and aggregates them into the total inflation forecast. Usage of the tool will allow clustering these components into a few groups by their dynamics, which will reduce model complexity and improve generalization. Also, it'll open a huge field for the analysis of these series relationship nature and other macroeconomic series influence that might work great in terms of particular series explanation (for example, exchange rate change explains laptop and smartphone inflation well). All these possibilities support forecasting performance.

References:

Sharma P., 2019. “The Ultimate Guide to 12 Dimensionality Reduction Techniques (with Python codes).” Available at: https://www.analyticsvidhya.com/blog/2018/08/dimensionality-reduction-techniques-python/

Shlens J., 2005. “A tutorial on Principal Component Analysis.” Available at: https://www.cs.cmu.edu/~elaw/papers/pca.pdf

Maaten L., Hinton G., 2008. “Visualizing Data using t-SNE.” Available at: http://jmlr.org/papers/volume9/vandermaaten08a/vandermaaten08a.pdf

McInnes L., Healy J., Melville J., 2018. "UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction." Available at: https://arxiv.org/pdf/1802.03426.pdf

Caiado J., Crato N., Pena D., 2006. "A periodogram-based metric for time series classification." Available at: http://www.academia.edu/download/43600797/cluster_CSDA2006.pdf

Dokmanic I., Parhizkar R., Ranieri J., Vetterli M., 2015. "Euclidean Distance Matrices. Essential Theory, Algorithms and Applications." Available at: https://arxiv.org/pdf/1502.07541.pdf

Kalpakis K., Gada D., Puttagunta V., 2001. "Distance measures for effective clustering of ARIMA time-series." Available at: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.58.5139&rep=rep1&type=pdf

Berndt D., Clifford J., 1994. "Using Dynamic Time Warping to Find Patterns in Time Series." Available at: https://www.aaai.org/Papers/Workshops/1994/WS-94-03/WS94-03-031.pdf

Izakian H., Pedrycz W., Jamal I., 2015. "Fuzzy clustering of time series data using dynamic time warping distance." Available at: http://www.ece.ualberta.ca/~izakian/J1.pdf

Xu D., Tian Y., 2015. "A Comprehensive Survey of Clustering Algorithms." Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s40745-015-0040-1

MacQueen J., 1967. "Some methods for classification and analysis of multivariate observations." Available at: https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200512992

Ester M., Kriegel H., Sander J., Xu X., 1996. "A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise." Available at: http://www2.cs.uh.edu/~ceick/7363/Papers/dbscan.pdf

Vazquez-Chanlatte M., Deshmukh J., Jin X., Seshia S., 2017. "Logical Clustering and Learning for Time-Series Data." Available at: https://mjvc.me/papers/cav2017.pdf

Krukovets D., Verchenko O., 2019. "Short-run forecasting of core inflation in Ukraine: a Combined ARMA approach." Available at: Currently not available

Huwiler M. and Kaufmann D., 2013. "Combining disaggregate forecasts for inflation: The SNB's ARIMA model." Economic Studies from Swiss National Bank No 2013-07. Available at: https://www.snb.ch/n/mmr/reference/economic_studies_2013_07/source/economic_studies_2013_07.n.pdf

Grygoriy Zholtkevych,

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine,

Arseniy Gromovoy,

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine,

HOW TO COMPARE THE EXPRESSIVENESS OF CAUSALITY RELATIONSHIPS SPECIFICATION LANGUAGES BASED ON THE CONCEPT OF LOGICAL CLOCKS?

Grygoriy Zholtkevych, Arseniy Gromovoy

Abstract. In these theses, we consider the specification problem for causality relationships. This problem is quite important for modern software engineering due to expansion application sphere of distributed computing and distributed technical systems. But this problem is a challenge for logic and mathematics. An in this context, understanding the limit expressiveness for the corresponding specification languages is one of the principal tasks.

Keywords: causality relationship, specification language, logical clock.

1. Motivation

A complex modern technical system is as a rule cyber-physical i.e. it is a complex of interacted both physical and cybernetic components. The correct behaviour specification of such a kind of systems includes constraints for distinguishing correct and incorrect system operating schedules (sequences of system events). This distinguishing is determined by the system of causality relationships specific to the system being considered. Thus, to provide development processes for systems of this kind we need a tool for the specification and analysing causality relationships.

Due to paper [1] of Leslie Lamport, the concept of logical clocks is the de-facto standard for specifying causality relationships in distributed systems. This concept considers sources of homogeneous time-ordered system events as logical clocks and system events as ticks of the corresponding clocks. Such abstraction allows focusing our attention on the consideration of causality relationships only.

The aim of this issue is to understand the decidability properties for the class of languages fit for specifying causality constraints based on logical clocks concept.

2. Problem Formalisation

For more rigorous reasoning, let us introduce some finite set C, the elements of which are considered as labels of logical clocks, then any nonempty subset of C is considered as a notification and interpreted as the set of clocks ticked at the time-point. The set of notification is below denoted by ΓC. Now we can rigorously define schedule as a mapping from the set **N**

of natural numbers into ΓC and denote the set of schedules (the schedule space) by ΓC^{ω}.

In the context, some subset P of the schedule space can be considered as a schedule property and the relation "a schedule σ satisfies the property P" (symbolically, $\sigma \models P$) means $\sigma \in P$ in this case.

The main question is whether all properties fit for specifying some checkable constraint. The answer, of course, is no.

Indeed, if for each notification **n** and natural N, we consider the sequence of function[1]

$$r_N^{\mathbf{n}}(\sigma) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=0}^{N} [\sigma[k] = \mathbf{n}]$$

then the property "for any **n**, the limit $r_N^{\mathbf{n}}(\sigma)$ exists when N tends to ∞" is not checkable because for checking it, we are needed in the complete (and, therefore, infinite) information about schedule σ.

It is needed to remark that the engineering applications require a specification technique for recognising violations of the constraints specified as design requirements. In this sense, the mentioned property is not good because of any initial behaviour does not influent on the limit behaviour constrained by this property.

The suitable class of properties that can be used for specifying the needed behavioural constraints was informally described by L. Lamport [2] and formalised by B. Alpern and F.B. Schneider [3].

The properties of this class are called safety properties and defined as follows:

a property P is called a safety property if for any $\sigma \notin P$ there is a natural N that for any schedule σ' such that $\sigma[0{:}N]=\sigma'[0{:}N]$ the statement $\sigma' \notin P$ is also true.

In other words, for a safety property and a schedule that does not satisfy this property the fact of property violation can be established during finite observing the system being studied.

B. Alpern and F.B. Schneider found interesting interrelation between safety properties and closed subsets of the schedule space equipped with Tikhonov topology. Taking into account that the family of sets[2]

$$\{\alpha \cdot \Gamma C^{\omega} \mid \alpha \text{ is a finite sequence of notifications}\},$$

one can understand that there is the correspondence between safety properties and prefix-free sets of finite sequences of notifications. Each finite sequence of notifications that corresponds to a safety property can be considered as evidence of the property violation.

---

[1] Here and below we use the Python-like notation for finite and infinite sequences including the function len.

[2] Here, $\alpha \cdot \Gamma C^{\omega}$ refers to the set of schedules that have α as the common initial subsequence.

This consideration demonstrates that we can use only specifications that represented by some prefix-free recursive sets of finite sequences of notifications for computer analysing specifications of causality relationships.

3. Self-delimiting Turing Machines as Detectors for Violations of Causality Constraints

Let us remind [4] that a self-delimiting Turing machine is a Turing machine with one input tape and one or more working ones. At before operating, the input tape contents the special symbol "#" at the zero-position and the analysed sequence of notifications in others.

The current action of the machine determined by the contents of the observed cells of the input and working tapes and the current state. When the current state became an accepted state the machine is halted.

The schedule prefix that has been read before halting part of the input tape is considered as recognised evidence of a violation for the constraint being defined by the machine.

It is evident that a self-delimiting Turing machine recognises some prefix-free and recursive set of finite notification sequences. The inverse statement is also true (see, for example, [4, Theorem 50]). It is also known, that there is a universal self-delimiting Turing machine (see [4, Sec. 4.4]). Such a language can be considered as the most expressive language for specifying causality relationships.

The universality of the most expressive language leads immediately to Rice Theorem for our problem. Thus, a good solution to the problem is developing of a hierarchy of decidable languages for specification of causality relationships.

4. Conclusion

The mentioned above reasoning demonstrates the complexity for solving the problem of developing causality constraints specification languages satisfying the universality property. More useful, at least from the applied point of view, to develop some technique for constructing a hierarchy of specification languages with predictable properties. The similar technique namely the technique of typed λ-calculi and the corresponding languages is widely used in theoretical programming.

Thus, we can pose the problem of developing a theoretical framework for constructing different decidable languages for specifying causality constraints oriented on neediness arisen in the specific domain.

1. Lamport L. Time, Clocks, and the Ordering of Events in a Distributed System / L. Lamport // CACM 21 (7). – 1978. – P. 558-565.

2. Lamport L. Proving the Correctness of Multiprocess Programs // IEEE Transactions on Software Engineering (22). – 1977. – P. 125-143.

3. Alpern B. Recognizing safety and liveness. / B. Alpern, F.B. Schneider // Distributed Computing (2). – 1987. – P. 117-126.

4. Shen A. Kolmogorov Complexity and Algorithmic Randomness / A. Shen, V.A. Uspensky, N. Vereshchagin. – AMS, Providence, Rhode Island. – 2017.

Дрінь Світлана Сергіївна, кандидат фіз.-мат. наук, старший викладач,

НаУКМА, Київ, Україна

e-mail: Svitlana.Drin@ukma.edu.ua;

Лемешко Єлизавета Ігорівна, студент 2 курсу, магістерська програма "Прикладна математика", факультет інформатики,

Національний університет «Києво-Могилянська Академія», Київ, Україна,

e-mail: e.lemeshko@ukma.edu.ua

СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Дрінь С.С., Лемешко Є.І.

Abstract: Educational process systems are a complex organizational part of specialized institutions. Mathematical models of such systems allow explaining qualitatively the educational system, to promote economic efficiency and potential. Due to the complex structure of such training systems, mathematical models — both developed and future — can be effectively used to explain the behavior of educational systems and to help them create, decide on better system design and operation. These theses, above all, describe the prerequisites for building an effective mathematical model of the educational process of secondary and high school in Ukraine. The main purpose of this work is to create a system that can evaluate the important criteria of the student in the process of learning at school and recommend the direction of the future profession.

Ключові слова: математична модель, навчальний процес, мотивація, якість навчання.

Системи навчального процесу – це складна організаційна система освітніх закладів. Математичні моделі таких систем дозволяють якісно пояснити освітню систему, сприяти підвищенню економічної ефективності та потенціалу. Через складну структуру подібних навчальних систем, математичні моделі – як і вже розроблені, так і майбутні, — можна ефективно використовувати, аби пояснити поведінку освітніх систем та допомогти в їх створенні, рішення щодо кращого дизайну системи та експлуатації. У даних тезах представлено передумови до побудови ефективної математичної системи освітнього процесу середньої та старшої школи в Україні. Основна мета роботи полягає у створенні системи, яка зможе оцінювати ступінь схильності до природничих або гуманітарних наук та рекомендувати напрямок майбутнього фаху.

Багато авторів у сфері освіти (наприклад, [1], [2]) досліджували моделі для визначення взаємозв’язків між чинниками, що впливають на якість навчального процесу зовні та зсередини. Одним з етапів є проведення анкетування, про яке коротко буде описано нижче. Важливим є те, аби отримана модель в результаті мала змогу розв'язувати реальну проблему, тобто знайшла своє прикладне застосування.

Очевидним є те, що при позитивній відповіді на ці питання, можемо переходити до етапу підключення математичних моделей. З іншого боку, при хоча б часткових негативних відповідях необхідно переглянути та доопрацювати наявну структуру.

В опитуванні наразі має взяти участь всі охочі учні зі шкіл м. Обухова Київської області, 8-11 класу навчання. Респонденти матимуть заповнити, яку тематично можна розбити на наступні секції: навчальний процес, проведення вільного часу, емоційний стан, батьки. Зважаючи на клас навчання, до вибірки додаватимуться додаткові дані про попередні результати навчання. Також, для наповнення тестової вибірки, додаватимуться дані про вступників до ВНЗ зі шкіл-учасниць експерименту. Таким чином, можна буде сформулювати тестові та контрольні групи з опитуваних.

Запропонована система має вигляд рис. 1. В процесі дослідження та відповідно до отриманих даних система може змінюватись. Наразі планується протестувати систему на простій лінійній математичній моделі, що має вигляд:

$$y_n = f(x_{\text{сер}}, y_{n-1}, A) \quad (1)$$

$x_{\text{сер}}$— середня оцінка за всі предмети, що вивчались впродовж року;

$y_{\text{n}-1}$— середня оцінка за напрямком за попередній період;

А — зовнішній, позашкільний фактор.

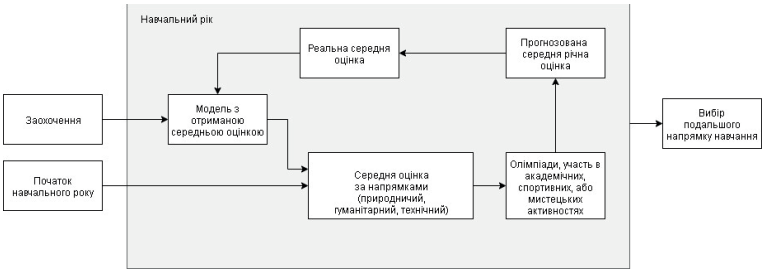


Рис. 1. Вигляд системи

Дана система може бути використана в будь-якому навчальному закладі України. Вона допоможе викладачам неупереджено оцінити схильність учнів до певного предмету. Математична модель пояснює логіку вибору абітурієнтів того чи іншого напрямку. Оскільки вибір кожного не є наперед невідомим фактом, можливо змоделювати логічний зв'язок між рівнем освіти, мотивацією та остаточним вибором учня.

1. Carl N. Brooks. Training System Evaluation Using Mathematical Models / C.N. Brooks // Educational Technology – June, 1969. – P. 55-61.

2. Mohamed Z.G. Two Models of Describing Students' Achievement in Mathematics:A Comparative Study / Al-Agili M. Z. G., Mamat, M. B., Abdullah, L., Maad, H. A. // Australian Journal of Basic and Applied Sciences. – 2013. – P. 184-198.

Зубенко Віталій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент ,

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна ,

e-mail: zub2@ukr.net

ПРО ПОВНОТУ КЛАСИЧНИХ ЛОГІЧНИХ ЧИСЛЕНЬ

Зубенко В.В.

Ключові слова: логічне числення, секвенційне числення, секвенційне дерево.

A calculus is complete, if each its true formula is a theorem. The general method of construction of complete classical calculus is considered. The method is illustrated by classical proposional calculus.

Класичне числення - повне, якщо всі усюди істинні його формули є теоремами. Доповідь присвячена побудові повних числень. Як правило, така побудова проводиться методом «знизу–вверх». Спочатку певним чином вибираються аксіоми і правила виведення. Потім формально доводиться певна сукупність важливих допоміжних теореми і на заключному етапі, спираючись на них, вже обгрунтовується сама повнота числення. Голове питання - як правильно вибрати аксіоми, правила виведення та віднайти необхідні допоміжні теореми.

Дуальним підходом до сказаного є метод «зверху-вниз». Він зводиться до попереднього семантичного аналізу структури формул і пошуку «тривіальних» їхніх підструктур таких, що їх достатньо для отримання формули у якості логічного наслідку. Тоді у найпростішому випадку ці «тривіальні» структури можуть бути взяті у якості аксіом, а правила виводу мають просто зафіксувати відповідні схемам логічних наслідків. В інших випадках числення має забезпечити виведення цих найпростіших структур і формальне доведення вказаних логічних наслідків. Це має гарантувати повноту числення. Для здійснення семантичного аналізу формул пропонується взяти секвенційне числення. Для ілюстрації методу вибрано класичну та секвенційну пропозиційні логіки [1]. Тут результати семантичного аналізу формул задаються секвенційними деревами, «тривіальні структури» відповідають листкам дерев, а логічні наслідки – відношенням між батьками та синами вершин дерев.

Даний підхід може бути корисним у курсах з математичної логіки для демонстрації тісного зв'язку між семантикою і синтаксисом логічних систем.

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. / Н.С.Нікітченко, С.С.Шкільняк. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 528 с.

Зубенко Віталій Володимирович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент ,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна ,
e-mail: zub2@ukr.net

ПРО ПРОЦЕДУРНУ ПЛАТФОРМУ ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ

Зубенко В.В.

The class of tabular algorithms as a general basis for classical algorithmic systems are proposed. Algebraic properties of these algorithms are considered.

Ключові слова: процедура, алгоритм, табличний алгоритм.

В [1] зроблена спроба уточнити загальне поняття функції як процедури. В доповіді виділяється підклас, так званих, табличних алгоритмів та обчислюваних функцій як загальна основа для класичних алгоритмічних систем. Розглядаються алгебраїчні властивості даних алгоритмів та функцій.

Нехай $\langle \Gamma, < \rangle$ – довільна лінійно впорядкована сукупність, яку будемо трактувати як часовий простір. Позначимо τ^+ та τ^- безпосередньо наступний і попередній моменти часу для моменту τ. Вважається, що в часовому просторі немає найменшого та найбільшого елементів. Інформаційну складову процесів обчислень подають *стани.* Нехай S – довільна множина станів. Пара $\Pi = \langle \Gamma, S \rangle$ називається *обчислювальним простором.* Зафіксуємо певну сукупність $\Delta = \{f_i : S \to S \mid i \geq 0\}$ *елементарних операцій* на станах і визначимо *функцію керування* процесами як $\delta : \Gamma \times S \to 2^{\Delta}$. Остання пов'язує з кожним моментом часу обчислення одне або кілька можливих елементарних перетворень поточного стану.

Трійка $P = \langle \Pi, \Delta, \delta \rangle$ називається *обчислювальною процедурою* над простором Π. Кожна обчислювальна процедура породжує певну сукупність обчислень у просторі Π. Нехай $\tau \in \Gamma$ та $s \in S$ – довільні момент часу і стан. *Обчислення* $p : \Gamma_\tau \to S$ за процедурою P з початком у момент часу τ і початковим станом s_0 визначається рекурентно: $p\tau = s_0$ і для всіх $\varsigma > \tau$ $p\varsigma = f_\varsigma(p\varsigma^-)$, де $f_\varsigma \in \delta(\varsigma, p\varsigma^-)$. Для завершення процесу обчислень та визначення їхніх результатів виділяють сукупність вихідних станів або застосовують певні часові фактори. Кожна процедура описує (обчислює) певну функцію. Якщо процедура описується конструктивно, то вона називається абстрактним алгоритмом.

Серед усіх алгоритмів виділимо підклас табличних алгоритмів як загальної основи для усіх класичних алгоритмічних систем. Нехай часовий простір Γ-дискретний і збігається з натуральним рядом N, P – довіла процедура у просторі $\Pi = \langle N, S \rangle$. (Табличні алгоритми можуть бути визначені у будь-якому факторизованому часовому просторі.)

Факторизуємо функцію переходу δ за часовим аргументом і станами. Зафіксуємо деяку часову константу $k \geq 1$ і певне відношення еквівалентності π на станах. Функція переходу δ періодична за модулем відношення π із періодом k (k-періодична), якщо для будь-яких еквівалентних станів p та s і довільного моменту часу $t \in Z$ виконується $\delta(t, p) = \delta(t \pm k, s)$. Якщо еквівалентність π має скінченний індекс і розв'язні класи, то процедура з періодичною функцією переходу називається *табличним алгоритмом.*

Традиційні алгоритмічні системи є табличними алгоритмами, а точніше $1-$періодичними табличними алгоритмами, тому що їхня функція керування не залежить від часової компоненти (скінченні автомати, алгоритми Маркова тощо). Наприклад, машина Тьюрінга є табличним $1-$періодичним алгоритмом: два її стани еквівалентні, якщо їхні внутрішні стани та стани робочих комірок на стрічці збігаються.

Розглядаються теореми про аналіз та синтез, а також інші властивості табличних алгоритмів.

Література.

1. Зубенко В. В. Програмування: Навчальний посібник / В. В. Зубенко, Л. Л. Омельчук.– К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. - 625 с.

Летичевський Олександр Олександрович, доктор фіз.-мат. наук,

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України,

e-mail: oleksandr.letychevskyi@litsoft.com.ua

АЛГЕБРА ПОВЕДІНОК ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Летичевський О.О.

Ключові слова: алгебра поведінок, предикатний перетворювач, базові протоколи, верифікація, модельне тестування, символьне моделювання.

У 1997 році Девід Гілберт і Олександр Летичевський (старший) ввели поняття *алгебри поведінок* [1], що пропонувалась для формалізації функціонування агентів у деякому атрибутному середовищі. Вона була реалізована як частина парадигми *інсерційного моделювання* [2], яка досліджує *функцію занурення* (insertion function) для взаємодіючих агентів та середовищ.

Алгебра поведінок - це двосортна алгебра, яка визначає відношення та операції між поведінкою та діями. Алгебра має дві операції, три термінальні константи та відношення наближення. Операціями є префіксінг $a.u$ (де a - дія, а u - поведінка) та недетермінований вибір поведінки $u + v$ (асоціативні, комутативні та ідемпотентні операції на множині поведінок). Кінцеві константи - це успішне закінчення поведінки Δ, тупик 0 та невизначена поведінка $\perp$. Відношення апроксімації $\sqsubseteq$ це частковий порядок на множині поведінок з мінімальним елементом $\perp$. Алгебра поведінок також збагачується двома операціями: паралельними (||) та послідовними (;) композиціями поведінок.

Взаємодія агентів може бути рекурсивно представлена як множина виразів над поведінками та діями. Дії визначаються через деяку множину атрибутів агентів та середовища, в якому всі агенти взаємодіють один з одним. Агент змінює свій стан за деяких умов, утворених значеннями атрибутів. Дії кожного агента визначаються парою: $a = \langle P,S \rangle$, де P є передумовою дії, представленої як формула в деякій базовій логічній мові, S – це постумова. В якості основної логічної мови ми розглядаємо формули логіки першого порядку над поліноміальною арифметикою та деякі спеціалізовані теорії, як перелічуваний тип. В цілому, семантика дії означає, що агент може змінити свій стан, якщо передумова є істиною, і стан зміниться відповідно до постумови, що також є формулою логіки першого порядку. Початковий стан агентів може бути представлений формулою, починаючи з якої, ми можемо застосувати дію, відповідну виразу алгебри поведінки. Дія застосовна, якщо її попередня умова виконувана та відповідає поточному стану. Починаючи з формули стану агента S_0 і від поведінки B_0, ми вибираємо дію і переходимо до наступної поведінки. На першому кроці ми перевіряємо виконуваність кон'юнкції $S_0 \wedge P_{a1}$, якщо $B_0 = a1.B_1$, а P_{a1} є передумовою дії $a1$.

Наступний стан середовища буде отриманий за допомогою предикатного перетворювача [3], тобто функції над поточним станом агента, передумовою та постумовою $PT(S_i, P_{ai}, Q_{ai}) = S_{i+1})$. Застосовуючи функцію предикатного перетворювача до різних станів агента, ми можемо отримати послідовність формул $S_0, S_1, \ldots,$ які виражають зміни стану агентів від початкового стану. Таке розгортання поведінки визначається як *символьне моделювання*.

Починаючи із 1999 року методи та властивості алгебри поведінок активно застосовувались та впроваджувались в різних областях індустрії, активні дослідження тривають і зараз.

При вирішенні проблем верифікації, моделі представлялись за допомогою алгебри поведінок на різних рівнях. Так, у рамках проекту компанії Motorola, вимоги до програмних та апаратних систем представлялись як рівняння алгебри поведінок, а методи символьного моделювання досліджували такі специфікації на відсутність тупиків, недетермінізму, властивостей безпеки. В інших проектах, у рамках процесу розробки програмного забезпечення, застосовувався модельний спосіб тестування, де в якості моделей використовувалися специфікації алгебри поведінок, а різновиди розгортання поведінок у вигляді прямого та оберненого символьного моделювання застосовувались як генератори тестових наборів. Методи алгебраїчного зіставлення використовуються в задачах кібербезпеки, де бінарний код та шаблони вразливостей представлені як вирази алгебри поведінок, а зіставлення відбувається шляхом вирішення рівнянь.

Інші методи, що реалізовані в рамках алгебри поведінок – визначення трасової та бісімуляційної еквівалентності, проблеми монотонності середовища, генерація інваріантів, були застосованими для певних класів моделей, відповідно до алгоритмічної складності.

1. A. Letichevsky, D. Gilbert. Interaction of agents and environments, in: Recent Trends in Algebraic Development Technique, LNCS 1827 (D. Bert and C. Choppy, eds.), Springer-Verlag, –1999.

2. A. Letichevsky, O. Letychevskyi, V. Peschanenko. Insertion Modeling and Its Applications. Computer Science Journal of Moldova, Vol. 24, Issue 3. – 2016. – pp. 357-370.

3. Летичевский А.Ад., Летичевский А.А., Годлевский А.Б., Песчаненко В.С., Потиенко С.В. Свойства предикатного трансформера системы VRS Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 4. – С. 3–16.

Лялецький Олександр Вадимович, кандидат фіз.-мат. наук, с.н.с.,

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна,

e-mail: a.lyaletski@nubip.com.ua

ПРО ВБУДОВУВАННЯ В ЗВОРОТНИЙ МЕТОД ТЕХНІКИ РОБОТИ З РІВНІСТЮ

Лялецький О.В.

Ключові слова: зворотний метод, класична логіка першого порядку з рівністю, секвенційне числення, вивідність, резолюційна техніка, спростування.

Пропонується і досліджується підхід до вбудовування в зворотний метод [1] техніки поводження з рівністю. Підхід спирається на результати роботи [2], в якій запропонована секвенційне трактування зворотного методу для класичної логіки першого порядку без рівності. Саме вбудовування здійснюється додаванням в секвенційне трактування певного правила поводження з рівністю. Отриманий результат про коректність і повноту запропонованого розширення зворотного методу на випадок логіки з рівністю, яке містить модифікації правил А і Б з [1], а також правило поводження з рівністю, має наступний вигляд.

ТВЕДЖЕННЯ. Вихідна секвенція виводиться в секвенційному численні LKe [3] тоді і тільки тоді, коли в запропонованому розширенні зворотного методу на випадок класичної логіки з рівністю виводиться секвенція, в антецеденті якої зустрічається пуста формула.

Також зауважимо, що в [4] було дано трактування зворотного методу в резолюційних термінах для класичної логіки першого порядку без рівності при міркуваннях за виконуваністю, і це трактування допускає своє парамодуляційне розширення зі збереженням коректності та повноти на випадок пошуку спростування в класичної логіці першого порядку з рівністю.

References

1. Маслов С.Ю. Обратный метод установления выводимости в классическом исчислении предикатов / С.Ю. Маслов // ДАН СССР, 159, № 1, 1964. – С. 17-20.

2. Lyaletski A. On a sequent form of the Inverse Method / A. Lyaletski // The 5th Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 55th anniversary of Vladimir Andrunachieveci Institute of Mathematics and Computer Science, September 28 - October 1, 2019, Chisinau, Moldova: proceedings. – 2019. – P. 207-210.

3. Такеути Г. Теория доказательств / Г. Такеути. – Москва: Мир, 1978. – 412 с.

4. Лялецкий А.В. Об одном исчислении к-дизъюнктов / А.В. Лялецкий // Сб. “Математические вопросы теории интеллектуальных машин”. – Изд. ИК АН УССР, 1975. – С. 34-48.

Володимир Навроцький, доктор філософських наук
Інститут філософії імені Г.С. Сковороди НАН України
e-mail: navrotsk@gmail.com

ОБҐРУНТУВАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ: АРГУМЕНТАЦІЙНА СЕМАНТИКА

Володимир Навроцький

Обґрунтування прийняття рішень передбачає оцінку не тільки тверджень, але й правил, принципів, цінностей, приписів або команд. Приписування значень «істина» або «хиба» реченням, які їх виражають, є проблематичним. До того ж, умови діалогової аргументації, в рамках якої здійснюється обґрунтування, можуть не бути достатньо повно визначеними заздалегідь або можуть змінюватись по ходу аргументативного діалогу. Це свідчить про обмеженість застосування дедуктивного виводу для обґрунтування прийняття рішень.

Для обґрунтування прийняття рішень, що приймаються за нечіткої, неповної або суперечливої інформації, розроблені різні числові і нечислові теорії. У багатьох числових теоріях застосоване числення ймовірностей. До нечислових належать, наприклад, теорії порівняльної ймовірності. А деякі нечислові теорії взагалі не спираються на поняття ймовірності.

За логічного підходу до прийняття рішень об'єктом аналізу є аргумент, чий висновок виражає рішення щодо передбачуваної дії. У випадку аргументації у невизначених умовах засновки такого аргументу, його висновок і перехід від засновків до висновку можуть кваліфікуватися як правдоподібні або ймовірні. А це означає, що прикладання схеми виводу до засновків аргументу не веде необхідно до істини його висновку. У такому випадку прийняття висновку ґрунтується не на його істинності, а, наприклад, на стійкості до атак іншими аргументами.

Цей принцип лежить в основі побудови формальних аргументаційних систем, що пропонують механізм виводу для міркувань із висновками, що потенційно скасовуються. Аргументам, які витримали атаки контраргументів, надається перевага. Аргументи, які уражаються іншими аргументами, анулюються. Це говорить про те, що прийнятність висновку аргументу зумовлена не тільки силою його засновків і схеми виводу, а й силою інших аргументів, що підтримують або атакують висунутий аргумент.

В одній з аргументаційних семантик вводяться поняття сили засновків і схем виводу, а також поняття обґрунтованості висновків. Ці сили і обґрунтованість висновків представляються ступенями. Семантика, на думку автора цього підходу, повинна мати вигляд правил, відповідно до яких обчислюються ступені обґрунтування висновків [Поллок 2010].

Ця семантика може стати базою побудови семантики для обґрунтування прийняття рішень в умовах невизначеності. Остання повинна містити, принаймні, визначення понять прийнятності засновків, успішності переходу від засновків до висновку, поняття ступеня обґрунтованості висновків, понять переваги і прийняття висновку:

1. *Засновки прийнятні*, якщо і тільки якщо вони є хорошими підставами для прийняття висновку. Такою підставою є їхня обґрунтованість. Засновки вважаються хорошими у тому сенсі, що мають досить високий ступінь обґрунтованості.

2. *Перехід від засновків до висновку є успішним*, якщо і тільки якщо він детермінований достатньою силою схеми виводу. Звісно, суттєвим тут є питання, на якій підставі силі схеми виводу приписане те чи інше число і на чому ґрунтується її характеристика як достатньої. Для засновків відповідь є більш-менш ясною. Їм ступені приписуються на підставі свідчень – інформації із зовнішнього світу: ступінь засновку є функцією свідчення. Можна припустити, що, зрештою, сила схеми виводу залежить від атак аргументу контраргументами.

3. *Ступінь обґрунтованості висновку* аргументу є значенням функції ступенів його засновків і схеми виводу.

4. Після того, як висновками аргументів, що змагаються, приписані відповідні ступені обґрунтованості, *перевага* надається висновку із більш високим ступенем. *Прийняття висновку* аргументу ґрунтується на перевазі і, в кінцевому рахунку, є функцією обґрунтованості висновку. З цього випливає, що висновок приймається у деякому ступені. Перевага отримує числове вираження. Введенням ступенів знижується невизначеність її встановлення.

Проект розробки числової аргументаційної семантики для обґрунтування прийняття рішень в умовах невизначеності привабливий тим, що саме вона природним чином дає відповідь на питання, «як схема аргументації, що потенційно вражається, може підтримати аргумент ... навіть якщо підтримка залишається частковою або попередньою» [3, 149]: ступінь обґрунтування висновку, що детермінований схемою аргументації, застосованої у відповідному аргументі, є вищою за ступінь висновку, детермінованою схемою аргументації, що застосована у контраргументі. Цей проект привабливий ще й тим, що враховує суттєве зауваження щодо нечислових теорій: «…без мір ймовірності ми не здатні встановити процедуру для оновлення ступенів раціонального переконання» [1, 71].

Література

1. Fano, V., 2011. A Critical Evaluation of Comparative Probability // Fundamental Uncertainty: Rationality and Plausible Reasoning, Edited by Silva Marzetti Dall'Aste Brandolini and Roberto Scazzieri, Palgrave Macmillan, 59-72.
2. Pollock, J. L., 2010. Defeasible Reasoning and Degrees of Justification //*Argument and Computation*, V.1, № 1, 7-22.
3. Walton, D., 2005. Argumentation Methods for Artificial Intelligence in Law. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Омельчук Людмила Леонідівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: l.omelchuk@knu.ua;

Шишацька Олена Володимирівна, кандидат фіз.-мат. наук, асистент,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,

e-mail: shyshatska@knu.ua

ЗАДАЧА РОЗВ'ЯЗНОСТІ ФОРМУЛ В ТЕОРІЇ НОМІНАТИВНИХ ДАНИХ

Омельчук Л.Л., Шишацька О.В.

Abstract. Computer-aided verification of computer programs often uses SMT (satisfiability modulo theories) solvers. The SMT-LIB Standard was created for forming a common standard and library for solving SMT problems. In terms of the composition-nominative approach, we can build a program verification system based on a unified conceptual basis. The theory of nominative data is of interest for software modeling and verification, but currently lacks support in the SMT-LIB format. We propose the declaration for the theory of nominative data for the SMT-LIB Standard 2.6.

Ключові слова: композиційне програмування, теорія номінативних даних, SMT, SMT-LIB.

Композиційне програмування є розвитком структурологічного підходу Г. Фреге, який був перенесений на програмування А.А. Ляпуновим та розвинений Ю.І. Яновим, А.П. Єршовим, Л.О. Калужніним, В.М. Глушковим та іншими. В композиційному програмуванні досліджуються системи на різних рівнях абстракції – абстрактному, булевському та номінативному (атрибутному) рівнях. Системи останього рівня, базуються на композиційно-номінативних методах, є досить багатими для достаньо адекватного задання моделей структур даних та програм. Таким чином, композиційно-номінативний підхід надає єдину методологічну основу для формалізації поняття специфікації програм, доведення їх властивостей, а також для проведення їх подальшої конкретизації до мов програмування більш низького рівня [1].

На номінативному рівні дані трактуються як номінативні дані. Клас номінативних даних ND побудований індуктивно на основі множин імен V та значень W:

1) $ND^{(0)} = W$,
2) $ND^{(i+1)} = ND^{(i)} \cup \left(V \overset{m}{\to} ND^{(i)}\right), i \in \omega$.

Тоді $ND = \bigcup_{i\in\omega} ND^{(i)}$.

Це індуктивне визначення класу номінативних даних може бути подано наступним рекурсивним визначенням: $ND = W \cup \left(V \overset{m}{\to} ND\right)$, де $V \overset{m}{\to} ND$ – клас часткових багатозначних (недетермінованих) функцій.

Для представлення номінативних даних можна використовувати форму $d = [v_i \mapsto a_i | \, i \in I]$, де I деякий набір індексів. Система даних номінативного рівня може бути задана як кортеж $NDS = \langle V, W, D \rangle$, де $D \subseteq ND$. Кожен із рівнів розгляду множини даних D індукує відповідні йому функції та композиції, які будемо позначати індексом D. Функції мають тип $D \xrightarrow{m} D$, а композиції трактуються як n-арні композиції. В [1, 2] побудовано та досліджено теорію номінативних даних. Зокрема, досліджено номінативну обчислюваність та продемонстровано, що будь-яка ЧРФ може бути представлена номінативно обчислюваними функціями над множиною натуральних чисел у номінативних даних [2].

Для побудови методів верифікації програм важливим завданням є вирішення задачі розв'язності для логічних формул з урахуванням теорій, що лежать в їх основі (Satisfiability Modulo Theories (SMT)). Велика кількість SMT-вирішувачів використовують уніфіковану мову опису задач SMT-LIB, що дозволяє достатньо просто замінити один SMT-вирішувач на інший. SMT-LIB – це міжнародна ініціатива, започаткована в 2003 році, спрямована на сприяння науково-дослідним розробкам та дослідженням SMT-теорій [3]. Наявність загальних стандартів і бібліотек для SMT полегшило оцінку і порівняння SMT-систем, а також стимулює їх подальший розвиток. У SMT-LIB теорія визначається як клас структур з однаковою сигнатурою. Σ-теорія - це клас Σ-структур. Кожна з цих структур є моделлю теорії. Типові теорії SMT-LIB складаються з єдиної моделі (наприклад, цілих чисел, дійсних чисел) або з класу всіх структур, які відповідають аксіомам теорії.

Незважаючи на те, що теорія номінативних даних представляє інтерес для моделювання та верифікації програмного забезпечення [1, 2] наразі відсутня її підтримка у форматі SMT-LIB. Тому в [2] запропоновано та досліджено теорію номінативних даних для стандарта SMT-LIB 2.6. Теорія номінативних даних може бути представлена як поєднання базових теорій. Проте, в [2] запропоновано визначити цю теорію як базову, оскільки вона містить специфіку, яку неможливо отримати модульним поєднанням теорій, а отже використання спеціально побудованої SMT-теорії дозволить ефективніше здійснювати перевірку виконуваності формул. В [2] побудовано та досліджено SMT-теорію номінативних даних як теорії номінативних пар та номінативних множин.

Література.

1. Nikitchenko, N.: A Composition Nominative Approach to Program Semantics. Techn. Report IT–TR. Technical University of Denmark, Lyngby (1998).
2. Omelchuk Liudmyla. Extending the SMT-Lib Standard with Theory of Nominative / Liudmyla Omelchuk, Olena Shyshatska // Proceedings of the 15th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume II: Workshops. – Kherson, Ukraine, June 12-15, 2019. – PP.522-533. CEUR-WS .org, Vol. 2393, online, http://ceur-ws.org/Vol-2393/.
3. Barrett, C., Fontaine, P., Tinelli, C.: The SMT-LIB Standard: Version 2.6. Publishing house of Department of Computer Science, The University of Iowa. (2017). Homepage, http://www.SMT-LIB.org , last accessed 2019/03/11.

Наталія Русіна, кандидат педагогічних наук, асистент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: rusina@knu.ua

ФОРМАЛІЗАЦІЯ РЕЧЕНЬ ПРИРОДНОЇ МОВИ МОВОЮ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЕНЬ

Русіна Н.Г.

Abstract. The problem of mathematical logic teaching to the students of educational program "Applied Linguistics" is investigated. Formalizing sentences in the language of utterance logic should improve students' understanding of the concepts of mathematical logic.

Ключові слова: логіка висловлень, природна мова, формалізація речень, формальна мова.

Природна мова виражає наші думки, а також фіксує зв'язок між ними. Одним із завдань курсу «Математична логіка» для студентів освітньої програми «Прикладна лінгвістика» є навчити їх ефективно використовувати логічні закони та операції на практиці під час прийняття рішень, а також, у процесі спілкування. Процес міркування та синтезу даних приводить до обґрунтованості висновків. На нашу думку, саме міркування студентів в будь-якій предметній області призводить до повнішого розуміння предмету вивчення.

До формальних мов відноситься мова логіки висловлень, яка є однією з тем, що вивчаються в курсі «Математична логіка» для студентів спеціальності «Прикладна лінгвістика» Київського національного університету імені Тараса Шевченка [3]. Питанням навчання студентів математичній логіці присвячені роботи [1-2], але специфіка викладання цієї дисципліни студентам-філологам не достатньою мірою висвітлена. Студенти філологічних спеціальностей звикли мати справу з звичайними реченнями. Тому, однією з цілей мови логіки висловлень є аналіз змісту висловлень природної мови.

Мова логіки висловлень – спеціально створена знакова система для точного аналізу певних мисленнєвих процедур – вивідності одних висловлень з інших, їх доведеності чи спростованості тощо [4].

У 2017-2019 роках на практичних заняттях з курсу «Математична логіка» освітньої програми «Прикладна лінгвістика» нами було проведене педагогічне дослідження, яке показало, що сприйняття студентами-філологами логічних формул, без наведення прикладів природньою мовою, сприймається гірше (див. рис. 1).

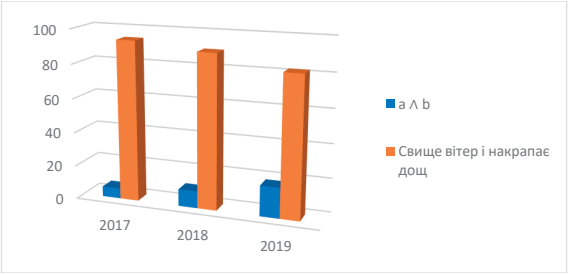


Рисунок. 1. Оцінка якості сприйняття логічних висловлень студентами-філологами

Тому для кращого засвоєння матеріалу студентам-філологам на практичних заняттях, пропонується починати пояснення знакових засобів мови логіки висловлень – природною мовою.

Пояснення студентам, що формалізація речень відбувається за строго визначеними правилами, надасть змогу надалі використовувати логічні закони саме на практиці, наприклад, для створення програмних продуктів для аналізу природної мови.

Для побудови речень природної мови мовою логіки висловлень скористаємось таким алгоритмом:

- виокремлюємо всі прості висловлення та позначаємо їх пропозиційними змінними;
- зв'язуємо прості висловлення логічними сполучниками;
- записуємо отриману формулу.

Вищезгаданий алгоритм використовуємо для виконання практичного завдання.

Наведемо приклади формалізації речень для студентів філологічних факультетів.

Приклад 1. Запишіть мовою логіки висловлень таке речення: «Свище вітер і накрапає дощ але світить сонце».

За структурою – це речення складне. Воно складається з декількох простих висловлень: «свище вітер» - позначимо (a); «накрапає дощ» - позначимо (b); «світить сонце» - позначимо (c).

Також в цьому реченні є мовні зв'язки (граматичні сполучники): «і», «але», які позначимо відповідно кон'юнкцією «∧». В результаті аналізу речення формалізований вид даного висловлення буде: $a \wedge b \wedge c$.

Приклад 2. Формалізуйте висловлення мовою логіки висловлень: «Якщо студент виконає всі навчальні завдання і студент матиме бал не нижче 60 то він на іспиті отримає позитивну оцінку».

За структурою – це речення складне. Воно складається з декількох простих висловлень, а саме: «студент виконає всі навчальні завдання» - позначимо (a); «студент матиме бал не нижче 60» - позначимо (b); «він на іспиті отримає позитивну оцінку» (c). Виявляємо граматичні сполучники: «Якщо, … то» - «→»; «а» - є синонімом сполучника «і» - «∧». Після проведеного аналізу записуємо речення засобами логіки висловлень: $(a \wedge b) \rightarrow c$.

Як висновок, доречно зазначити, що формалізація речень мовою логіки висловлень повинна посилити розуміння студентами-філологами понять математичної логіки, зокрема логічних законів та операцій.

Література.

1. Kleene, S.C.: Mathematical Logic. 1966. Retrieved from https://archive.org/details/KleeneMathematicalLogic/page/n11
2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів, підручник // К.-Київський університет. - 2008. - 528 с.
3. Rusina N. (2019). Teaching of the Course "Mathematical Logic" for Students of Humanities. Logic and its Applications. The workshop. 1ST WORLD LOGIC DAY, Kyiv. Retrieved from http://logic.net.ua/sites/default/files/Book%20of%20Abstracts.pdf
4. Гасяк О.С. Формальна логіка. Розв'язкові процедури, алгоритми, словник базових термінів і понять: навч. посібник / О.С.Гасяк. – Вид. 2-ге, переробл. та доповн. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2014. – 544 с.